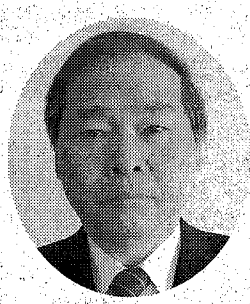
埼玉経済

サイ・テクこらむ　知と技の発信【67】

埼玉大学・理工学研究の現場

測地線が閉じた多様体の探求

阪本 邦夫　大学院理工学研究科教授



現代の数学者が研究する幾何学は「微分幾何学」と「位相幾何学」の2分野に大別される。筆者の専門は前者である。

微分幾何学とは簡単に述べると、滑らかな曲面を抽象化した「可微分多様体」と呼ばれるものの上に、長さを測れる計量など何らかの構造を導入し、微分や積分を用いて「多様体」の形や性質を研究する学問である。

計量が導入された多様体を「リーマン多様体」という。リーマン多様体上には「測地線」と呼ばれる特殊な曲線がある。これは、ユークリッド幾何学では直線に相当するものであり、2点間の最短線である。

例えば、地球を球面と見なせば東京とニューヨークを結ぶ最短線は、東京とニューヨークと地球の中心が定める平面と地球の表面との交線の一円弧である。

もう一つの例として円柱面を考えて見よう。円柱面上の2点間の最短線は何であるか。円柱面を縦にはさみで切って平らに広げ2点間を線分で結び、元の円柱面に丸めて戻してみる。らせん状に描かれた曲線が最短線である。

2点間の測地線を両側に延長していくと、球面の場合のように閉じてしまうことがある。すべての測地線が閉曲線で一周の長さがすべて同じLであるリーマン多様体を「CL多様体」と呼ぶ。2次元の場合は「再会曲面」と呼ばれ、しゃれた名前が付けられている。

球面以外に多くのCL多様体が存在することが知られているが、3次元以上の場合には、コンパクト階数1の対称空間と2次元の例からの類似物のみが知られている。一般次元CL多様体の体系的な研究は、現在のところ、めぼしいものが無いといってよいと思う。

CL多様体は難しいのでもう少し条件を強めたものが「ブラシュケ多様体」である。この多様体についてはかなりのことが研究されているが、ブラシュケ多様体はコンパクト階数1の対称空間であろうという予想は未だ解決されていない難問である。

そこでもう少し条件を強めたものが「強調和多様体」である。強調和多様体とは熱核（温度分布を表す関数）が2点間の距離のみに依存する関数になっているようなリーマン多様体のことである。リヒネロビッチは調和多様体が階数1の対称空間であろうということを予想した。

この多様体は測地線を外から見るとらせん状に見えるようにユークリッド空間に埋め込めるという大変よい性質を持っている。この性質を用いてサボーは1990年に「リヒネロビッチ予想」を強調和多様体について肯定的に解決したが、これには筆者も多少は貢献したつもりである。「ブラシュケ予想」が解決されるのはいつのことになるのであろうか。

◇　◇　◇

阪本　邦夫氏（さかもと・くにお）48年生まれ。東京工業大学理工学研究科博士課程中退。博士（理学）。同大学助手、助教授、茨城大学教育学部教授を経て、97年より現職。専門は微分幾何学、特にCR多様体、部分多様体、極小曲面の研究。

【編集者からのお知らせ】

本欄は埼玉大学で行われている研究を紹介しています。このような数学の世界があることを知っていただければ幸いです。

企業、団体商店街などの話題や情報をお寄せ下さい

TEL048・795・9161　FAX048・653・9040