逆形一般化しりとりゲームの考察と組合せゲーム教材の教育的検討

自然科学系教育サブプログラム

田中　将太

【指導教員】　松原　和樹　　飛田　明彦　　西澤　由輔
【キーワード】　一般化しりとりゲーム　　主体性　　苦手意識　　授業外

１．問題の所在と本研究の目的

平成 29 年に告示された中学校学習指導要領では,「数学的に考える資質・能力」の育成を重視し、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して学習を展開することが求められている。また、「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、その過程を振り返って結果の意味を考察すること」が示されており、現実の世界と数学の世界を往還する学習の重要性が強調されている。さらに、生徒が自ら課題に向き合い、主体的に学習に取り組むことが重視されており、その実現に向けた学習環境や教材の工夫が求められている。

一方で、文部科学省の全国学力・学習状況調査 (2023) によれば、「数学が好きではない」「数学が得意ではない」と回答する生徒が一定数存在し、こうした生徒ほど授業外で自主的に学習へ取り組む割合が低いことが報告されている。また、TIMSS2023 の質問調査結果からは、日本の中学生は数学を学ぶ楽しさや学習に対する自信の得点が国際的に低い水準にあり、学習意欲の面で課題を抱えていることが示されている。これらの結果は、数学的活動や主体的な学びの重要性が指摘されている一方で、必ずしも十分に実現されていない現状を示しているといえる。

このような課題に対して、数学の内容そのものだけでなく、生徒が取り組みやすく、探究的に思考を深めることができる教材の開発が重要である。その一つとして、離散数学に基づくグラフ教材が挙げられる。本研究で扱う「グラフ」は、関数のグラフや統計的なグラフではなく、頂点と辺から構成される離散グラフを指す。数学教育においては、一筆書き問題や多面体に関する学習などでグラフが用いられてきた（長崎、2007；花木、2009）。グラフは、日常生活における様々な事象や関係性を視覚的に表現できる点に特徴があり、現実の問題を数学的構造として捉え直すことを可能にする教材である。この点において、日常の世界と数学の世界の往還を促す題材として有効であると考えられる。しかし、グラフを含む離散数学に基づく教材は、学校数学において十分に活用されているとは言い難く、教材開発の余地が多く残されている。

また、生徒の主体的な学びを促す観点から、パズルやゲーム的活動の教育的効果にも注目が集まっている。南垣内 (2021) はカードゲーム型教材を用いた実践を通して、数学への関心や意欲の向上が見られたことを報告している。さらに、古林 (2018) は、「ゲームをつくり変える」活動が、条件変更を通した探究や生徒自身による数学的発見を可能にすることを指摘している。これらの研究は、ゲームやパズルが生徒の興味関心を喚起し、主体的な学習を支える教材となりうることを示している。

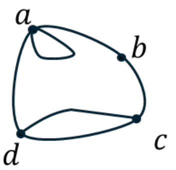
とりわけ、偶然性を含まず、完全情報のもとで進行する組合せゲームは、ゲームの構造を分析し、戦略を一般化する過程において数学的思考を深めやすい特徴をもつ。原田・愛木 (2012) は、組合せゲームを用いた実践を通して、規則性の発見や考察活動を通じて数学の楽しさを実感する児童・生徒の姿を報告している。また、福井他 (2018) は、組合せゲームのアプリケーションを活用することで探究的な学習を充実させる可能性を示している。しかし、これらの多くは授業内での実践に焦点を当てた研究であり、授業外において生徒が自発的・主体的に取り組む教材としての有効性については十分に検証されていない。

そこで本稿の構成は次のとおりである。第 2 章ではグラフの各種用語について整理する。第 3 章と第 4 章では組合せゲームの特徴を示した上で、本研究で扱った逆形一般化しりとりゲームについて説明する。第 5 章では逆形一般化しりとりゲームにおける、いくつかのグラフに対する必勝者判定について、現段階で得られた考察結果を説明する。第 6 章からは組合せゲームを用いた実践について報告する。第 6 章でアンケートの分析をする際に基準とした「主体性」の捉え方について説明する。第 7 章から第 9 章にかけて、実践で扱った数取りゲームの概要と教材実践とアンケート分析の方法について述べる。第 10 章でアンケートの分析を行い、第 11 章と第 12 章で考察と今後の課題を述べる。

２．グラフ

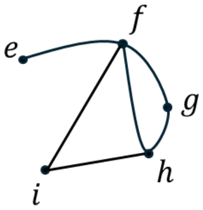
本章では、本研究で扱うグラフについての用語を定義していく。なお、定義はボンディ・マーティ (2008/2022) から引用している。

グラフ (graph) G とは、有限個の**頂点**の集合 $V(G)$ とそれらを結ぶ**辺**の集合 $E(G)$ の組 $(V(G), E(G))$ を**グラフ**と呼ぶ。グラフがループ (同一の端点を持つ辺) も多重辺（同じ２端点を持つ２本以上の辺）も持たないとき、そのグラフは**単純 (simple)** であるという。図１は単純でなく、図２は単純である。なお、本稿では図 3 以降は頂点集合と辺集合の記載は省略する。また、単純グラフのみを考察の対象とするため、以降扱うグラフはすべて単純グラフであることを前提としている。



$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$
$$E(G) = \{aa, ab, ad, bc, cd, cd\}$$

図１　グラフの図形的表現の例



$$V(G) = \{e, f, g, h, i\}$$
$$E(G) = \{ef, fg, fh, fi, gh, hi\}$$

図２　グラフの図形的表現の例

各辺に向きが割り当てられているグラフを有向グラフといい、各辺に向きが割り当てられていないグラフを**無向グラフ**という。本研究では無向グラフの逆形一般化しりとりゲームを考察するため、有向グラフは扱わない。

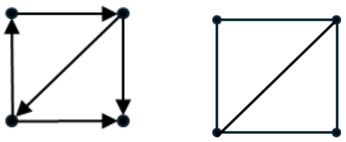


図３　有向グラフと無向グラフ

次に、特別なグラフについての定義を行う。**完全グラフ**はどの２つの頂点も隣接しているグラフである。頂点数がnである完全グラフをK_nと表す（図４）。**道**(path)とは、その頂点を一列に並べたとき、隣り合う頂点同士は隣接し、隣り合わない頂点同士は隣接しないグラフである（図５）。同様に、**閉路**(cycle)とは位数３以上のグラフで、その頂点を円周上に並べたとき、隣り合う頂点同士が隣接し、それ以外の頂点同士は隣接しないグラフである（図６）。**連結グラフ**は、完全グラフ$A_1, \dots, A_m$を、各iに対してA_iとA_{i+1}がただ１頂点のみを共有し、さらにA_iとA_{i+1}以外の組、すなわち隣り合わない完全グラフ同士は頂点を共有しないグラフとする（図７）。**連結数**は、連結グラフのmの値を指す。なお、本稿での連結数は独自の表現であり、辺連結数などで用いられる連結数とは別の意味である。

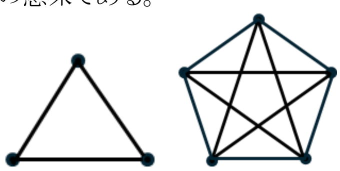


図４　完全グラフ（K_3, K_5）

図５　長さ２、長さ３の道

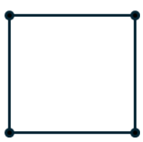


図６　閉路の例

図７　連結グラフの例

３．組合せゲーム

組合せゲームとは、サイコロを振るなどの偶然の要素を含まない「確定性」と、ゲームの進行において、山札や手札などの伏せられている情報がない「完全情報性」の２つの性質を持つ２人対戦ゲームのことである。身近なゲームでは囲碁や将棋、チェスなどが挙げられる。組合せゲームには以下のような特徴がある。

①<u>誰でも参加できる簡易なルール</u>

組合せゲームはルールをシンプルにしやすく、予備知識を必要とせずに、学力差に関係なく取り組むことができるものが多い。また、対戦型という「勝利」を目指す性質を持つことや操作が視覚的・具体的であることから、数学に苦手意識を持つ生徒でも取り組みやすく、多様な学習者に対応する教材である。

②<u>数学的概念との関連</u>

組合せゲームはゲームの盤面の分析や必勝法を考える際に数学的な概念を用いて表したり、考えたりすることができる。数学の抽象的な概念を、ゲームを通して経験的に捉えることができ、これらの概念の理解に向けた媒介として機能する。したがって、ゲームの分析は数学的思考の深化に寄与する活動となりうる。

③<u>深い数学性</u>

近年、日本でも組合せゲームを数学的に分析する研究が活発になっており、教育の場でも注目が高まっている。組合せゲームはその単純なルール設定の裏に、状態を整理するための「構造化の考え方」や、勝敗を左右する「戦略的思考」、さらには必勝戦略を理論的に導く「数学的な一般化」など、深い数学的な考え方が含まれている。こうした特徴により、生徒はゲームを通して自然に数学的な思考へと入り込みやすく、数学の見方・考え方を豊かにしていくことが期待できる。

④<u>協働的な学び、説明活動及び探究活動に適した教材</u>

組合せゲームは、取り組んだ者同士で対戦を分析したり必勝法を考えたりすることを通して協働的な学びを促す。こうした活動では、生徒が自らの考えを数学的表現や論理的表現を用いて説明する必要があり、説明活動の質を高めることが期待できる。また、組合せゲームはルールの変更や拡張が容易であり、「ルールが変わると勝敗や戦略はどのように変化するか」といった発展的な探究を自然に導くことができる。③の特徴を内包しつつ、生徒の主体的・協働的な探究活動を支える教材として組合せゲームは高い教育的有用性を持つといえる。

４．逆形一般化しりとりゲーム

一般化しりとりゲームは、しりとりを有向グラフで表したものである。初手のみ、プレイヤーが自由に 1 つの頂点に石を置くことができる。その後、手番のプレイヤーが直前に石が置かれた頂点と隣接している頂点のうち 1 つに石を置く。この際、石を置くことができる状況ではプレイヤーは必ず石を置かなければならない。また、1 つの頂点には 1 つしか石を置くことができない。自分の手番で石を置けなくなったプレイヤーの負けとなる。したがって、相手が石を置けなくなるように石を置くと勝利となる。

本研究で扱う逆形一般化しりとりゲームでは、自分の手番で石を置けなくなったプレイヤーの勝ちとなる。

先手(次の手番のプレイヤー)が必勝戦略を持つ局面を**$\mathcal{N}$局面**、後手(直前の手番のプレイヤー)が必勝戦略を持つ局面を**$\mathcal{P}$局面**とよぶ。$\mathcal{N}$局面はどの着手を選択しても$\mathcal{P}$局面にしか遷移しないが、$\mathcal{P}$局面は着手によって$\mathcal{N}$局面と$\mathcal{P}$局面になることがある。また、組合せゲームのすべての局面は$\mathcal{N}$局面か$\mathcal{P}$局面に分類することができる。初期状態が$\mathcal{N}$局面であるグラフを**$\mathcal{N}$局面グラフ**、初期状態が$\mathcal{P}$局面であるグラフを**$\mathcal{P}$局面グラフ**と定義する。

５．グラフの初期状態での必勝者判定

本章ではいくつかのグラフに対する必勝者判定問題の考察結果を示す。なお、証明の際には 1 手目のプレイヤーを X、2 手目のプレイヤーを Y とする。また、証明の都合上、石を置くのではなく、頂点とその頂点に接続している辺を除去することとする。以下、グラフGに対して、Gから 1 手後の局面をG_1、2 手後のグラフをG_2、以下G_3 , G_4⋯, G_n (nは自然数とする) とする。

頂点数が 1 のグラフは X が頂点を除去し、ゲームが終了する場合しか起こり得ないため、$\mathcal{P}$局面グラフである。

頂点数が 2 以上のグラフに対して以下の定理が得られる。

定理 5.1　次数 1 の頂点を持つグラフは$\mathcal{N}$局面グラフである。

証明) 次数 1 の頂点を持つグラフGを考える。図 8 は次数 1 の頂点を持つグラフの一例である。X が 1 手目で頂点Aを除去したとき、X が必勝戦略をもつか Y が B を除去する必勝戦略を持つかに分けられる。

(ⅰ) X が必勝戦略をもつ場合

このとき、Gは$\mathcal{N}$局面グラフである。

(ⅱ) Y が B を除去する必勝戦略を持つ場合

ここで、X は 1 手目で頂点 A ではなく頂点 B を除去したときのことを考える。Y が次の手で頂点 A を除去すると、次に X が除去する頂点が無いため X が勝利する。Y が A 以外の頂点を除去すると、Y が持っていた B を除去する必勝戦略を X が使用することで X が勝利する。よってGは$\mathcal{N}$局面グラフである。したがって、次数 1 の頂点を持つグラフは$\mathcal{N}$局面グラフであることが証明された。

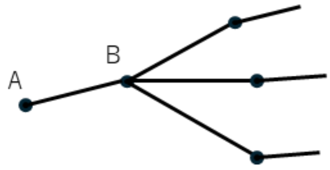


図 8　グラフG

系 5.2　道は $\mathcal{N}$ 局面グラフである。

定理 5.1 では次数 1 の頂点を持つグラフでは X が必勝戦略をもつことは明らかとなったが、具体的な戦略は示していない。しかし、道のグラフでは、頂点数が奇数のときは、X が次数 1 の頂点に隣接する頂点を最初に除去することで、頂点数が偶数のときは X が次数 1 の頂点を除去することで勝利することができる。そのため、　完全グラフ及び閉路については次の定理が成り立つ。

定理 5.3　頂点数が偶数の完全グラフは$\mathcal{N}$局面グラフであり、頂点数が奇数の完全グラフは$\mathcal{P}$局面グラフである。

証明) 完全グラフK_nはどの 2 つの頂点も隣接しており、どの局面でもすべての頂点を選択し、除去することができる。つまり、頂点数が奇数のとき、X が最後の頂点を除去することとなり、Y が勝利する。頂点数が偶数のとき、Y が最後の頂点を除去することとなり、X が勝利する。したがって、頂点数が偶数のときK_nは$\mathcal{N}$局面グラフであり、頂点数が奇数のときK_nは$\mathcal{P}$局面グラフである。□

定理 5.4　頂点数が偶数の閉路は$\mathcal{N}$局面グラフであり、頂点数が奇数の閉路は$\mathcal{P}$局面グラフである。

証明) 閉路Gでは、X がどの頂点を除去してもG_1は同型の道のグラフとなる。このとき Y は次数 1 の頂点のみが選択可能であり、各手番で選べる頂点は端点に限られる。よって、その後の着手は端点を交互に除去していく形となり、ゲームの進行は頂点数の偶奇のみに依存する。G の頂点数が偶数のときは Y が最後の頂点を除去し、X が勝利する。奇数のときは X が最後の頂点を除去し、Y が勝利する。よって、頂点数が偶数の閉路は$\mathcal{N}$局面グラフであり、頂点数が奇数の閉路は$\mathcal{P}$局面グラフである。□

完全グラフの頂点数がすべて奇数の連結グラフについて次の結果が得られる。

補題 5.5　$A_1, \ldots, A_m (m \geq 1)$の頂点数がすべて奇数の連結グラフ$G$で、端の完全グラフ$A_1$の連結点以外の頂点を 1 手目で除去したとき、得られる局面は$\mathcal{N}$局面である。

証明) X がA_1のうち、連結点以外の頂点を除去したとき、Y は常に端にある完全グラフのうち、隣の完全グラフとの連結点でない頂点を除去する、という手を続ける。このようにすると、A_1の頂点数が奇数だから、X は隣との完全グラフの連結点を除去することとなる。X が連結点を除去した場合、

Y は隣の完全グラフの連結点以外の頂点を除去する。このようにすると、最終的に X がA_{m-1}とA_mの連結点を除去する。その結果、A_mは単独のグラフとして残り、定理 5.2 よりA_mは$\mathcal{P}$局面グラフであるから、Y が勝利する。以上より、X が端の完全グラフに属する頂点を除去して得られる局面は$\mathcal{N}$局面である。□

定理5.6 $A_1, \dots, A_m$の頂点数がすべて奇数の連結グラフGは$m = 1,2$のときは$\mathcal{P}$局面グラフであり、$m \geq 3$のときは$\mathcal{N}$局面グラフである。

証明)

（ｉ）$m = 1$のとき

これは頂点数が奇数の完全グラフである。したがって、定理5.2 よりGは$\mathcal{P}$局面グラフである。

（ⅱ）$m = 2$のとき

X が連結点以外の頂点を除去したとき、Y は連結点を避けて頂点を除去し続けることで、X はいずれ連結点を除去せざるを得なくなる。X が連結点を除去したら、次に Y は、X が最初に着手しなかった側の完全グラフの頂点を除去すればよい。このとき残る完全グラフは奇数個の頂点を持つ完全グラフとなり、定理 5.2 より$\mathcal{P}$局面であるから Y は勝利する。したがって$m = 2$のとき、Gは$\mathcal{P}$局面グラフである。

（ⅲ）$m \geq 3$のとき

$A_1, \dots, A_m$の頂点数がすべて奇数の連結グラフGを考える。X がA_2の連結点以外の頂点を除去したとする。このとき Y が連結点以外の頂点を除去したとしても、X は常に残っている連結点以外の隣接頂点を除去することができ、最終的に Y が必ず連結点を除去することとなる。これは、完全グラフの頂点数がすべて奇数の連結グラフにおいて、端の完全グラフの連結点以外の頂点を開始頂点としたときと同値である。したがって、補題5.5 より、$m \geq 3$のとき、Gは$\mathcal{N}$局面グラフである。

以上のことから、（ｉ）（ⅱ）および（ⅲ）と補題5.5 より定理5.6 が示された。□

６．本研究における「主体性」の捉え方

本章以降では組合せゲームを用いた実践を報告する。

生徒、特に数学に対して否定的な感情を持つ生徒に主体的な学びを促すには、生徒が「楽しい」「おもしろい」と感じ、自ら「やってみたい」と思える教材や環境を提供することが重要である。さらに、単に「やってみたい」という興味にとどまらず、生徒が目的意識をもって学び続ける過程を通して主体的な学びが深まっていくと考えられる。

（1）文部科学省が示す視点

文部科学省(2020)は主体的・対話的で深い学びを実現する授業改善に向けた「学習者」の視点として以下の項目を挙げている。

・学ぶことに興味や関心を持つ
・自己のキャリア形成の方向性と関連付ける
・見通しをもつ
・粘り強く取り組む
・自己の学習活動を振り返って次につなげる

これらの項目が循環して行われることで生徒の主体的な学びは実現されると考えられる。加えて、これらの項目を基に授業を改善するだけでなく、授業外での学びの場でもこの項目が意識されることが必要であると考える。

（2）本研究における各項目との対応付け

本研究では、文部科学省の５つの項目を、生徒の思考・行動のプロセスとして 3 つの段階に整理し、「自発的段階」「主体的段階」「振り返り・改善の段階」として位置づける。各段階と対応する項目および生徒の具体的な行動は、表1に示すとおりである。

表１　主体性の３段階の分類

段階	対応する項目	具体的な行動
1. 自発的段階	・学ぶことに興味や関心を持つ	・面白そうだからやってみる ・何度もゲームに取り組む
2. 主体的段階	・自己のキャリア形成の方向性と関連付ける ・見通しをもつ ・粘り強く取り組む	・目的意識をもって取り組む ・戦略を考えながら何度もゲームに取り組む
3. 振り返り・改善の段階	・自己の学習活動を振り返って次につなげる	・ある局面を想定した最適手を考える ・振り返りを通して戦略を導く

７．実践で扱った組合せゲームの内容

本実践では組合せゲームの一種である「数取りゲーム」を扱った。このゲームは一般的には「ニム」と呼ばれることも多い。数取りゲームは、1 つの山に一定数のブロック（または数字）を用意し、2 人のプレイヤーが交互にそれらを取っていくゲームである。各プレイヤーは自分のターンに 1 個以上、あらかじめ定められた上限数以下の任意の個数を取らなければならない。例えば、上限数が 3 個であれば、1～3 個の任意の数を取る。これを繰り返し、最後の 1 個を取ったプレイヤーの敗北となる。したがって、最後の 1 個を相手に取らせることができれば勝利することができる。

数取りゲームは初期のブロックの総数や 1 手で取れるブロックの上限数を変更することで難易度や戦略が大きく変化する。また、最後の 1 個を取ったプレイヤーを勝ちとするルール（一般的にはこちらのルールが正規形である）変更も可能であり、様々なルール設定で取り組むことができるゲームである。

８．教材実践とアンケート分析の方法

中学校第 2 学年 4 クラスを対象に、教室に数取りゲームの教材を設置し、授業外で生徒が取り組む様子を観察した。

数取りゲームを採用した理由は、ルールがシンプルであり、視覚的にも理解しやすいことから、数学に苦手意識を持つ生徒でも取り組みやすいと考えられるためである。また、ルールの変更によって、どのように戦略が変わるのかを考える活動は、生徒が自ら考えながら取り組む機会となり、生徒の主体的な学習を促す可能性があると期待できるためである。

また、教材の設置前後で生徒に対してアンケートを実施し、生徒の数学の学習に対する好き嫌いやゲームへの取り組み状況、ゲームを通して生徒がどのように思考していたのかなどを調査した。それらの結果から、好き嫌いとゲームへの取り組みの関連性、また、組合せゲームが生徒の主体的な取り組みにつながるのか考察を行った。自由記述で回答する質問については、回答の内容を「自発的段階」「主体的段階」「振り返り・改善の段階」の３つの段階に分類した上で考察を行った。アンケートは教材の設置前後で、設置したクラスの生徒を対象に行った。設置前アンケートは紙面で、設置後アンケートはMicrosoft Forms を用いて実施した。アンケートの内容は以下のとおりである。質問番号①③は「好き」「どちらかというと好き」「どちらかというと嫌い」「嫌い」から選択、⑤は「5 回以上」「3～4 回」「1～2 回」「取り組まなかった」から選択、⑥は「レベル１」「レベル２」「レベル３」「レベル４」から複数選択可、それ以外の質問は自由記述とした。

設置前アンケート
対象…中学校２学年４クラス
回答者数…134 人(男子 76 人、女子 58 人)
質問項目
①数学の学習は好きですか。
②どのようなところが好き（嫌い）ですか。
③パズルや謎解きのような遊びは好きですか。
④どのようなところが好き（嫌い）ですか。

設置後アンケート
対象…中学校２学年４クラス
回答者数…127 人(男子 75 人、女子 52 人)
質問項目
①数学の学習は好きですか。
②どのようなところが好き（嫌い）ですか。
③パズルや謎解きのような遊びは好きですか。
④どのようなところが好き（嫌い）ですか。
⑤数取りゲームにどれくらい取り組みましたか。
⑥どのレベルに挑戦しましたか。
⑦（レベル４に取り組んだ人のみ）どのようなルールでレベル４を遊びましたか。
⑧(取り組んだ人のみ)取り組んだ感想を自由に記述してください。考えたことや気付いたことがある人はそのことも記述してください。
⑨(取り組まなかった人のみ)取り組まなかった理由があれば記述してください。

９．設置したゲームの概要

各クラスに図１のような数取りゲームを題材とした教材を設置した。また、ルールや注意事項を記載したポップを図10のように掲示した。教材は木製ブロックを用いて自作したものであり、レベルごとにシールで色分けし、各レベル１セットずつ用意した。レベル４(黄色)のブロックは、他のレベルのブロックと合わせて、初期のブロック数を任意に変更できるようにした。また、対戦者名とレベル、勝敗を記録できるシートも作成し、生徒には任意で記録するよう促した。

（１）対象

さいたま市立中学校第２学年４クラス

（２）期間

令和７年５月中旬～令和７年６月下旬

（３）使用方法

管理上の観点から、昼休みに各クラスの係の生徒が学年室から教室へ運搬することとし、昼休みの時間のみ取り組めるようにした。ゲームに取り組む際には使用するレベルのブロックのセットを各自で持っていき、自席で使用するよう指示した。

図９　設置した組合せゲーム

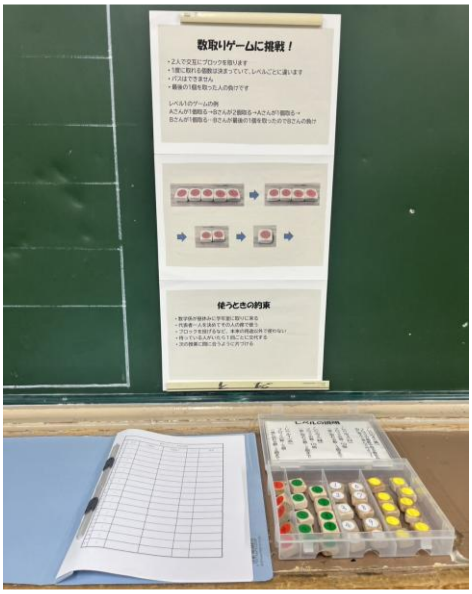


図１０　教材を設置した様子

（4）ゲームのレベル

今回作成したゲームは表２の４段階のレベルで構成されている。レベル１からレベル２の間では初期のブロック数の違いによる戦略の変化を、レベル２からレベル３の間では一度に取れるブロックの上限数の違いによる戦略の変化をそれぞれ体感できるよう設計した。レベル４は黄色のブロックと他のレベルのブロックを合わせて使用し、初期のブロック数および一度に取れるブロックの上限数を自由に設定できるようにした。

表２　用意したゲームのレベル

	初期のブロック数	一度に取れるブロックの上限数
レベル１(赤色)	5	2
レベル２(緑色)	10	2
レベル３(白色)	10	3
レベル４(黄色)	任意（最大 35）	任意

１０．生徒の実際

ここではアンケート調査を「数学およびパズルやゲームに対する生徒の意識」「ゲームへの取り組み状況」「数学の学習に対する意識とゲームへの取り組み状況の関連」「自由記述」の４つの視点から分析していく。また、ゲームに取り組む生徒の様子を観察したことも基に、生徒の実際の様子について述べる。

（1）数学とパズルやゲームに対する生徒の意識

設置前アンケートでは、数学の学習に対して好意的な回答をした生徒は 67 名(50%)であった。一方で、パズルや謎解きといった遊びに対して好意的な回答をした生徒は 113 名(85%)であり、数学の学習に比べて高い関心が示された。

表３　数学の学習に対する意識(質問１)とパズルやゲームに対する意識(質問３)の調査結果

	嫌い	どちらかというと嫌い	どちらかというと好き	好き	合計
質問 1	24 人	43 人	39 人	28 人	134 人
質問 3	5 人	15 人	58 人	56 人	134 人

（2）ゲームに取り組む生徒の様子

筆者の想定以上に積極的に活動に取り組む様子が見られた。特に普段の数学の授業では内容についていけず取り残されがちな生徒が自発的に活動に取り組む姿が見られた。活動の中では、生徒同士が「どのブロックを取ればよいか」など戦略について議論する場面や、筆者と対戦した際に自ら「なぜ勝てないのか」を考え始める場面もあった。

取り組む生徒を男女別で見ると男子生徒が大多数を占め、女子生徒が取り組む様子はあまり見られなかった。このことは設置後アンケートの結果とも一致している。

（3）ゲームへの生徒の取り組み状況

設置後アンケートによる取り組み状況は表 4 のとおりである。ゲームに１回でも取り組んだ生徒は 55 人(43%)であった。男女別に見ると男子生徒で 1 回でも取り組んだ生徒は 49 人(65%)であったのに対し、女子生徒は６人(12%)にとどまった。男子生徒で取り組んだ生徒のうち、半分に近い 22 人が５回以上取り組んでいた。

表４　組合せゲームへの取り組み回数

	0 回	1～2 回	3～4 回	5 回以上	合計
男子	26 人	12 人	15 人	22 人	75 人
女子	46 人	4 人	2 人	0 人	52 人
合計	72 人	16 人	17 人	22 人	127 人

（4）数学の学習に対する生徒の意識とゲームへの生徒の取り組み状況の関連

数学の学習に対する意識とゲームへの取り組み状況の関連は表 5 のとおりである。なお、設置後アンケートのみ回答した生徒がいるため、合計数にずれが生じている。また、本節では「好き」「どちらかというと好き」と回答した生徒を「好意的」、「嫌い」「どちらかというと嫌い」と回答した生徒を「否定的」とまとめて表現することとする。

表５　数学の学習に対する生徒の意識とゲームへの生徒の取り組み状況の関連

	0 回	1～2 回	3～4 回	5 回以上	合計
好意的	25 人	7 人	9 人	16 人	57 人
否定的	40 人	9 人	8 人	6 人	63 人
合計	65 人	16 人	17 人	22 人	120 人

数学の学習に対して否定的な生徒は 23 人(37%)がゲームに取り組んでいた。また、好意的な生徒は半数以上の 32 人(56%)がゲームに取り組んでいた。自由記述を分析すると、数学の学習に対して否定的でありながら 1 回でもゲームに取り組んだ生徒のうち、15 人が「楽しかった」「面白かった」と回答しており、数学への苦手意識とは異なる動機で活動を楽しむ姿がうかがえた。

（5）本実験における生徒の主体性

ここでは、アンケートの自由記述の回答を基に、「自発的段階」「主体的段階」「振り返り・改善の段階」の３段階に分けて分類する。

まず、「楽しい」「面白い」と回答した生徒は全部で 30 人いた。このうち 27 人の生徒は「楽しかった」「面白かった」のみの記述にとどまり、回答からはゲームについて生徒が考えたことを読み取ることができない。したがって、「自発的段階」に分類することとする。ただし、「楽しかった」「面白かった」のみの回答をした生徒の中には、レベル４のゲームに取り組み、自らルールを拡張させた生徒もいた。これは単なる興味関心だけではなく、ゲームの構造を理解し

た上で取り組んでいる可能性を示し、「自発的段階」から「主体的段階」への移行を示唆するものと考えられる。また、2人の生徒は「楽しい」という要素に加え、「いろいろな作戦を考えた」という回答も残していた。これは回数を重ね、取り組みを振り返ることで様々な戦略を導き出したのではないかと考えられる。したがって、「振り返り・改善の段階」に分類することとする。

次に、「頭を使った」「考えながら取り組んだ」のようにゲームの中で思考を巡らせたことを表す回答をした生徒は6人いた。生徒が様々なことを思考しながら、繰り返しゲームに取り組んでいることからこれらの生徒は「主体的段階」に分類することとする。

また、「倍数のことを考えて計算した」「先攻(後攻)がよい」など、具体的な戦略に言及した生徒も１２人いた。これらの生徒は、全員が3回以上ゲームに取り組んだと回答している。何度もゲームに取り組み、経験と思考を重ねることで様々な気付きを得たのではないかと推測できる。したがって、これらの生徒は「振り返り・改善の段階」に分類できると考えられる。

一方、「難しかった」と否定的な回答をした生徒は5人であった。この5人のうち3人は1～2回の取り組みであり、2人は3回以上取り組んでいた。1～2回の取り組みだった生徒はゲームに取り組み思考した上で難しかったという感想になっていると予測できるため「主体的段階」に分類する。3回以上取り組んだ生徒は複数回取り組み、思考を重ねてもなお難しいという感想に至ったと考えることができ「振り返り・改善の段階」に分類できると考えられる。

取り組まなかった生徒の回答では、「別のことをしていた」「興味がない」などの理由が27人に見られた。また、「ルールが分からなかった」「忘れていた」といった記述が14人、「一緒にやる人がいない」「他の人が使っていた」など、環境的な理由を挙げた生徒が８人いた。

１１．考察

まず、数学に苦手意識を持つ生徒を含む多様な生徒が組合せゲームをどの程度受容するのかの点についてである。アンケート結果から、数学に対して苦手意識を持つ生徒は23人(37%)が、数学の学習に対して好意的な生徒は32人(56%)がゲームに取り組んでおり、組合せゲーム教材が多様な生徒に受容されていたといえる。一方、自由記述の分析からは「別のことをしていた」「忘れていた」といった回答が41人(57%)で見られたほか、「やる相手がいなかった」「ほかの人が使っていた」のような回答は8人に見られたことから、教材の存在を広く生徒に周知する工夫や取り組みの環境整備次第でより多くの生徒の参加を促せる可能性が示唆される。

次に組合せゲームが授業外での数学的で主体的な取り組みにつながるのかの点について、自由記述の回答分析から考察する。ゲームに取り組んだ生徒のうち30人(55%)が「楽しい」「面白い」と回答しており、組合せゲームが生徒にとって自発的に取り組もうと思える教材であることが示唆された。また、「どうやって勝つか考えた」「頭を使った」といった回答は6人に見られたことから、生徒がゲームに勝利するために思考を巡らせていたことが読み取れる。これは、生徒が「自発的段階」から「主体的段階」に移行していることを示している。さらに、「倍数のことを考えた」「奇数以外を取ったら負ける」のようなゲームの戦略について具体的に述べた回答は12人に見られたことから、生徒がゲームの構造を数学的観点から分析していたことを示しており、組合せゲームが生徒の数学的で主体的な取り組みにつながる可能性を有する教材であると考えられる。

１２．今後の課題

逆形一般化しりとりゲームの考察では、規則的なグラフについてしか考察を行えていないため、より一般的なグラフについての考察を行う必要がある。そのためにも、規則的なグラフについての研究を進め、一般的なグラフについての考察の土台としていく。

教材実践では、ゲームのセットを各学級に1つ用意したが、生徒の取り組みが当初の想定を上回り、取り組みたくても他の生徒が使用しているために取り組めない生徒が存在した。特に、積極的に活動に参加する生徒(本実践では男子生徒に多く見られた)の取り組みが多かったことから、内向的傾向の強い生徒(本実践では女子生徒に多く見られた)が取り組みにくい状況が生じるなど、環境整備面での課題が見られた。

生徒の主体性については、概括的な分析しか行えなかったことが課題である。考察段階で自由記述の回答だけでは生徒の主体性を読み取り切れない例もあった。今後生徒の主体性を分析する際には、アンケートの内容の精査や活動の記録を取るなど行い、より詳細な分析を行う必要がある。また、主体性の段階の分類についても項目を見直し、曖昧な分類となった生徒を明確に区別することを可能にしていく。

数学の授業との結びつきについては、今回は検討できていない。これは本研究では主体的学習の実現に向けて、授業外での生徒の取り組みに焦点を当てたためであるが、今後は授業外の取り組みと授業内の取り組みをリンクさせ、生徒が主体的に臨むことができる授業についても検討する必要がある。

【謝辞】

さいたま市立上大久保中学校には、実践を行うにあたり大変お世話になるとともに、ご理解とご配慮を賜りました。厚く御礼申し上げます。

引用および参考文献

安福智明・坂井公・末續鴻輝(2024).『組合せゲーム理論の世界―数学で解き明かす必勝法―』. 共立出版.

国立教育政策研究所(2023). 「TIMSS2023 の結果(概要)のポイン

ト」.
国立教育政策研究所(2023). 「令和５年度全国学力・学習状況調査 質問紙調査報告書」.
国立教育政策研究所(2020). 「主体的・対話的で深い学びを実現する授業改善の視点について」.
小林靖明(2023).組合せゲームにおけるアルゴリズムと計算量. オペレーションズ・リサーチ,68(3),131-137
長崎栄三(2007).高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究　最終報告書.国立教育政策研究所.
花木良(2009).多面体の展開図におけるグラフの活用について.2009年度数学教育学会 秋季例会発表論文集,91-93
原田和樹・愛木豊彦(2012).「ゲームの必勝法を題材にした教材の開発と実践」.『岐阜数学教育研究』, 2012 Vol.11, pp.22-34.
福井昌則・末續鴻輝・安福智明・黒田昌克(2018). 「探究的な学習を促進するWindowsアプリケーション「組合せゲーム」の開発」,『コンピュータ＆エデュケーション』. VOL.45 2018, pp.133-136.
藤井美帆・草野絵梨佳・西村真由美・神山貴弥(2019). 「学校学習環境が生徒の主体性およびスクール・モラールに及ぼす影響」.『同志社大学教職課程年報』, 第８巻, pp17-34.
古林智美(2018).「数学科における「ゲームをつくり変える」活動の一考察―教材「Dice game」の授業開発を通して―」. 『授業実践開発研究』, 2018 第11巻, pp.11-20.
南垣内智宏(2021). 「カードゲーム型教材「エトミー」の効果について」.『和歌山大学教職大学院紀要』学校教育実践研究, No.6 2021, pp.83-94.
文部科学省(2017). 『中学校学習指導要領(平成29年告示) 解説 数学編』. 日本文教出版.
J.A.ボンディ・U.S.R.マーティ(2022).グラフ理論(山下登茂紀・千葉周也 訳).丸善出版.(原著出版2008年)