数学の理解を促進させる数学的活動に関する研究
ー高等学校の「場合の数と確率」に焦点を当ててー

自然科学系教育サブプログラム（算数・数学）

西村　勇真

【指導教員】　二宮　裕之　　西澤　由輔　　松原　和樹
【キーワード】 新しい価値　　アクティブ・ラーニング　　関係的理解　　学習水準　　確率概念

1．本研究の目的及び方法

本研究の目的は、理解しやすい且つ数学的活動が豊かな数学の授業に求められる要素を明らかにすることである。どの校種や単元でも言えることと、高等学校の場合の数と確率に焦点を当てた議論についてまとめる。理解しやすい指導、効果的な数学的活動の展開ということを主眼に置きながら、現在の高校数学の指導や教育全般に求められることも達成できる指導の在り方をまとめる。

本研究では、学校の教科教育全般→数学教育→場合の数と確率というように、幅広い分野にかかわる内容から少しずつ範囲を狭めることを通して、上記の目的の達成を図る。具体的な流れは、次の通りである。最初に、学校における教科教育の役割やアクティブ・ラーニングなど、学校の授業全般に求められることについて検討する。次に、高校数学の指導の在り方、数学の理解、数学的活動に関する検討と、数学の指導についてまとめる。最後に、「場合の数と確率」の単元や指導について調べることを通して、「場合の数と確率」の学習で起こり得るつまずきと、つまずき解消の手立てについて考える。様々な論文や文献で述べられていることを組み合わせ、新たな考察へとつなげる。

2．教科教育の役割について

林(2016)は、教科教育の役割について、以下のように述べている。(p.97)

> 学校において，すべての子どもは，仲間と関わる学びにおいて，「新しい価値」を創り出している。「新しい価値」とは，自身にある既存の価値を再構築するもの及び自身の内にこれまでに全くなかったもののことを指す。つまり，このような価値を自分の内に創り出すことにより，自己更新をすることができる。子どもは，自分にとっての「新しい価値」を創り出すことができる学びを繰り返すことにより，よりよく成長していくのである。
>
> 然るに，この「新しい価値」とは，独善的でなく「他者（以下，本論では，指導者も含んだ共に学ぶ仲間を意味する。）」の思いや考えを尊重した上に成り立っている汎用性の高い価値である。
>
> 子供は学校教育の基幹である教科教育の学習の中で仲間と関わり，他者の様々な価値に触れながら，新たな自己を創っていく。
>
> つまり，教科教育とは，子供の成長においての文化的側面の一助になるものである。成長における文化的側面は子供の日常の営み（実生活や学習生活が含まれる）の中で培われていく。感じる，見る，聞く，読む，考える等のことによって，文化的側面の新しい認識を形成していく。この新しい認識の形成は自分の価値観によるものである。このようにして，個々の価値観のもと自己の内に創り出されたものを「新しい価値」と記すことにする。

子ども同士で関わり、感じる、見る、聞く、読む、考えるなどの活動を行うことを通して、価値の再構築や創造を行う、つまり「新しい価値」を創り出している。そして、このことこそが教科教育の役割である。この教科教育の役割を踏まえて林(2016)は、教科教育の指導において必要なことについて、以下のように述べている。(pp.98-99)

> 教科教育には，教科の中身である 3 つの要素「目的・内容・方法」がある。教育現場において，学力が高い子供などというのは，この 3 つの要素が子供と密接につながっていることを意味している。つながっているとは，子供自身が学ぶ目的を自分事として捉えた上で，学ぶ内容や学ぶ方法を身に付けていることである。
>
> このように考えると，指導者としては子供と各教科の中身をどのようにつなぐか，ということが重要であると捉えることができる。（中略）子供と教科の中身がつながることを考えるとき，一つのキーになるのが，子供自身の追究であろう。追究の過程では，課題（task）のもと，解決するために様々な方法でアプローチする過程において，自分自身の内に新たな問い（problem）が生まれてくる。これが目的でもあり，内容でもある。このような追究は，教師からの伝達，すなわち教え込みの中では生まれない。子供は自身が主体とした活動を通して，やってみたい，考えてみたい，知りたいという欲求が生まれ，それが原動力となり追究を支えていくのである。
>
> このようなことを考えていくと，子供と教科の中身である目的・内容・方法の 3 つの要素をつなげていくために指導者が考えることは，子供にとって，どのような学習活動を構築，組織していくか，である。（中略）指導者は教え込みだけの伝達型から，考えさせる活動型のバランスを図ることが肝要である。そのバランスが図られているところに子供自身の創造が創られる。ゆえに，指導者は伝達型の授業から創造型への授業の転換が求められ

るのである。また，学習の主体は子供である。子供が主体となり新しい価値を創造するためには，子供が興味・関心をもち意欲的に学習することが欠かせない。

教科教育においては、教科の中身である 3 つの要素「目的・内容・方法」と子どもを密接につなげることが求められる。言い換えると、子ども自身が学ぶ目的を自分事として捉えた上で、学ぶ内容や学ぶ方法を身に付けているようにすることが求められる。そのためには教員による伝達のみで完結させるのではなく、子どもが主体的に活動する機会を導入し、双方のバランスを維持することが重要である。

３．アクティブ・ラーニングについて

中央教育審議会(2012)は、アクティブ・ラーニングの定義と特徴について、以下のように述べている。(p. 37)

> 教員による一方向的な講義形式の教育とは異なり、学修者の能動的な学修への参加を取り入れた教授・学習法の総称。学修者が能動的に学修することによって、認知的、倫理的、社会的能力、教養、知識、経験を含めた汎用的能力の育成を図る。発見学習、問題解決学習、体験学習、調査学習等が含まれるが、教室内でのグループ・ディスカッション、ディベート、グループ・ワーク等も有効なアクティブ・ラーニングの方法である。

学修者が能動的に学修に参加できていれば、その指導は例えどんな方法であっても、アクティブ・ラーニングと呼ぶことができる。中央教育審議会(2012)では高等教育に焦点を当てた議論を行っているため「学修」と表記されているが、「学習」に変換すれば初等教育や中等教育においてもアクティブ・ラーニングを定義することができる。

初等教育や中等教育におけるアクティブ・ラーニングの重要性についてはどう述べられているか。中央教育審議会(2016)は、子供たちに新しい時代を切り拓いていくために必要な資質・能力を育むために求められることの一つとして、*子供たちが，学習内容を人生や社会の在り方と結び付けて深く理解し、これからの時代に求められる資質・能力を身に付け、生涯にわたって能動的に学び続けたりすることができるようにするため、子供たちが「どのように学ぶか」という学びの質を重視した改善を図っていくこと*(p. 26)を挙げており、このことを達成するためにはアクティブ・ラーニングの視点が必要になると述べている。今の学校教育では学習内容を深く理解したり、これからの時代に求められる資質・能力を身につけたり、子どもが能動的に学習に取り組んだりすることなどが求められ、そのためにアクティブ・ラーニングを導入することが理にかなっている。

西川(2015)は、アクティブ・ラーニングの授業イメージについて、以下のように述べている。(p. 40)

> ①　教師から課題を与え、「全員達成が目標」と伝える。(5 分以内)
>
> 子どもが能動的に動く時間を最大限確保するため、できるだけ教師の最初の説明は 5 分以内にします。子ども全員を能動的にするため、全員が助け合い、全員が課題を達成することを目標にします。そのため「わからないから教えて」と自分から助けを求めることを奨励します。
>
> ②　「さあ、どうぞ」と動くことを促し、子どもが動く。(約 40 分)
>
> 「どんどん動いて課題を達成してね。さあ、どうぞ」と動くことを促します。最初は自分で課題を解いたり周囲の様子をうかがったりして、あまり動きはありません。しかし、そのうちに子ども同士で聞き合おうとどんどん動き始めます。子どもが動く時間を最大限確保することが、アクティブ・ラーニングの成果をアップするカギになります。
>
> ③　成果を振り返る。(5 分以内)
>
> 最後に全員が達成できたか振り返らせます。学習内容のまとめはしません。全員達成できなければ、どうしたら次回できるかを考えるように教師は伝えて授業を終わります。企業の社長が社員の細かい仕事をいちいち確認するより、チームの業績をチェックして、チームに解決方法を考えさせるほうが業績が上がるのと同じです。

この授業イメージでは、教師の説明を最小限に減らし、子どもが能動的に動く時間を最大限に増やすという心掛けがなされている。教師が簡潔に説明し、子ども同士による課題解決を行わせ、最後に次回の課題について子どもに考えさせる。そのような流れが記されている。

アクティブ・ラーニングを効果的に展開するために求められる指導についても、2 つの文献から読み取っていく。まず鈴木(2016)は、アクティブ・ラーニング型授業を有効に機能させるためのポイントとして、以下の 4 点を挙げている。(p. 42)

> ポイント１
>
> 生徒を主体的・協働的な学びに導く，「指導言」（説明・指示・発問・助言）等の工夫
>
> ポイント２
>
> 生徒が主体的・協働的に学ぶ，「学習形態・手法」の工夫
>
> ポイント３
>
> 生徒が主体的・協働的に学ぶ，社会との関わりを意識した「課題解決的な学習」の充実と「言語活動」の効果的位置付け
>
> ポイント４
>
> 生徒が主体的・協働的に学ぶ，社会事象について「情報をもとに考察し表現する活動」の重視

「主体的・協働的な学び」が成立していることの重要性が訴えられている。次に工藤・他(2017)は、アクティブ・ラーニングを成立させるための条件として、以下の 4 点を挙げている。(p. 98)

> ①学習課題がどのような形で示されたものであっても，

その意義が学習者にとって明確であり，その解決が学習者に達成感をもたらすものであること。
②学習者は学習課題を解決するために必要とされる知識・技能を部分的に有しており，それを使う自由が保証されていること。
③学習課題の解決は，異なった知識・技能を持った学習者どうしがそれらを提供しあうことで成し遂げられること。その意味で，共同する意義は明確であること。
④学習課題の解決に向けた活動を調整しサポートする体制が整っていること。

ここでは、学習課題に焦点が当てられている。学習課題を解決する意義、解決するために必要な知識・技能、解決するための環境が整っていることの重要性が訴えられている。

4．高校数学の指導について

「高等数学授業研究会」と呼ばれる、高等学校の数学の授業改善について議論している研究グループが行っている授業の特徴から、今の高校数学に求められている指導について調べる。中逸・他(2021)は、「高等数学授業研究会」が行っている授業の特徴について、GTI(Global Teaching InSights)授業観察コードの視点から、以下のようにまとめている。(p.81)

「対話(談話)」領域の「問いかけ」は，GTI 日本授業よりも，高校数学授業研究会の授業の方が高いスコアとなっている．「問いかけ」の観点は，「問いは，様々な種類の認知的推論を求める」ことであることから，高校数学授業研究会の授業では，教員が生徒に認知的な推論を要求する問いかけをしていることがわかる．「説明」は，高校数学授業研究会のすべての授業において，GTI 日本授業の平均スコアの 2.47 を超えていた．「説明」の観点は，「教員と生徒は記述/口頭で説明を行う．説明とは，考え(アイディア)や手続きがなぜそうであるかの理由を示したものである」というものであり，生徒と教員の両者の説明をもとに判断している．「説明」と同じ領域にある「対話(談話)の性質」は，「生徒は教室での対話や,やりとりに参加する機会を与えられる．生徒のやりとりは(数学に関する)詳細な内容で特徴づけられている」ことをみるものである．この「対話(談話)の性質」においても，高校数学授業研究会の授業が GTI 日本授業よりも平均スコアが高いことを鑑みると，教員の説明だけではなく，生徒もその説明に加わっている可能性がある．

「教科内容の質」領域の「はっきりとしたつながり」は, GTI 日本授業よりも, 高校数学授業研究会の授業の方が高いスコアとなっている．「はっきりとしたつながり」は，教科内容の考え，手続き，見方，表現，方程式を含んだつながりがはっきりとあるかどうかをみるものである．このことから，高校数学授業研究会の授業は, 1 つの授業の中で複数のつながりが表出していたことが伺える．

「生徒の認知的取り組み」領域の「認知面での要求が高い教科内容への取り組み」も，GTI 日本授業よりも，高校数学授業研究会の授業の方が高いスコアとなっている．「認知面での要求が高い教科内容への取り組み」は,「生徒は定期的に，認知的で豊かに考え抜くことを求められる分析，創造，評価活動に取り組む」ことをみるものである．この構成要素における高校数学授業研究会の授業のスコアが高かったことから，生徒に数学的に考えるように促す場面が多かったことが指摘できる．

「生徒の理解に対する評価と対応」領域の「教員のフィードバック」も，GTI 日本授業よりも，高校数学授業研究会の授業の方が高いスコアとなっている．「教員のフィードバック」は，「教員は生徒の考えていることに対してフィードバックのやりとりを通して応答し，それは, 1)生徒の考えが正しいか正しくないか，2)アイディアや手続きがそうであるかに焦点を当てている」ことをみるものである．高校数学授業研究会の授業が，この「教員のフィードバック」のスコアが高かったことから，授業の中で教員が頻繁に生徒の考えに耳を傾け，その考えに対してフィードバックしていたことが伺える．

高等数学授業研究会の一番の目標は、数学的に考える態度を育成させることにある。認知的に考える必要のある活動を行うこと、数学的事象に対する理由をつながりと共に説明すること、生徒に自らの考えとその理由を共有させること、生徒の発言のフィードバックを行うことは、数学的に考える態度の育成につなげることができ、これらを達成できる授業実践が求められる。

5．数学の理解について

数学の理解を示す用語が 2 種類ある。1 つ目は「用具的理解」、2 つ目は「関係的理解」である。用具的理解についてスケンプ(1992)は、*「理由なき規則」と呼んだものであって，かような規則を身につけてそれを用いる能力*(p.4)としている。関係的理解についてスケンプ(1992)は、*やっていることも，その理由も，どちらもわかっているということ*(pp.3-4)としている。ある数学の問題を解く上で、暗記した公式を用いている場合は用具的理解、それぞれの手順で何を何のために行っているのかが分かっている場合には関係的理解によって、その内容を理解していることになる。スケンプ(1992)は、用具的理解は習慣学習、関係的理解は知的学習に対応しているとも説明している。習慣学習についてスケンプ(1992)は、*行動が学習の結果によって強化されるのだから，学習は行動を伴う。そして，学習されるものは，実に行動なのであって認知的要素は少ない*(pp.40-41)ということや、*一度学習されれば，習慣は非常に頑固に保持されて適応可能性に乏しい*(p.41)ということを述べている。知的学習についてスケンプ(1992)は、*主な特徴は適応可能性ということである。同じ目標に対しても，いろいろ異なったやり方を見つけて，異なった場面に適応することができる*(p.41)

と述べている。習慣学習は行動や規則を覚える学習であり他に応用させることは難しいのに対し、知的学習は理論や構造を理解する学習であり他に応用しやすいという違いがある。スケンプ(1992)は、習慣学習と知的学習の在り方について、以下のように述べている。(pp. 42-44)

> どちらの学習も必要なのである。習慣学習，その特別な場合としての機械的学習は，数学の学習においても有用なものであり，必要なものである。（中略）問題は，それぞれの特別な要請に対して正しい種類の学習パターンを用い，その教科全般に対してそれを正しく組み合わせて使うことである。
>
> （中略）数学は高度に規則的な教科であるだけに，かなりの部分で知的学習が必要となる。筆者の見積もりでは 95 パーセントが知的学習であり，5 パーセントが習慣学習と思える。不幸にも，数学の学習が理由のない多くの規則を覚えることであると思っている多くの子どもは，このような学習方法をしない。
>
> また，不幸にも，もし結果が正しければ，この結果が機械的学習に基づくのか，理解に基づくのかがわからないので，このような学習はあまり起こらない。規則はすばやい結果をもたらす。よくできて，意欲的な子どもは多くの規則を記憶することができるので，理解が不足していることをただちにみとることができない。しかし，そのうちに，次の 2 つの理由から，このような記憶に頼った学習が失敗するときがくる。第一は，この方法で学習したことは，（中略）次の学習に何の助けにもならないことである。数学的な学習内容が増えてくるにつれて，記憶すべき量は，記憶にたいへんな負担になる。第二には，これらの規則はある限られた範囲の問題に対してしか働かないからである。習慣学習では，これらの数学的な考えが欠落しているから，学習者はこれらの規則を，同じ数学的考えに基づく，関連した問題に適用できない。そこで，子どもは数学的に成長することに失敗し，自信と自尊心を失っていく。

習慣学習で数学を学ぼうとすると、記憶しなければならない量が膨大になり、数学の学びを成長させることができなくなる。数学を指導する際は、関係的理解によって理解させることが重要である。

スケンプ(1973)は、子どもが数学の学習につまずく別の要因として、数学的概念が抽象的であるということも挙げている。スケンプ(1973)は、「より抽象的」という言葉について*「外界の直接体験からより遠ざかる」という意味*(p. 14)であるとしている。そして、数学的概念について*数学においては，諸概念は日常生活のそれよりもはるかに抽象的であるばかりでなく，学習はほとんど常にさらに抽象的な方向へと進む。数学的概念の伝達は，それゆえ，伝える側にとっても受け手にとっても，はるかに困難である*(pp. 15-16)と述べている。つまり、数学的概念は他の概念と比べて身近ではないが故に、伝達が困難であるという難しさが存在する。

６．数学的活動について

渡邊(2004)は、数学的活動の定義と必要性について、以下のように述べている。(pp. 48-49)

> 数学における認識の深まりを助長する行為を遍く数学的活動という。数学的活動という経験を重ねることにより定義，定理，数学的対象の存在が受け入れ易くなる。数学的活動は何らかの数学的構造を宿している。もちろん，その活動に宿っている数学的構造は他の数学的活動にも宿ることは当然ありうる。数学的構造は，普遍的であるがゆえに多様な事象に宿るのである。
>
> では，何故数学的活動が必要なのか。日常生活においては，経験したこともない，イメージもできないことを考えることは，まずない。それに比べて数学の学習は不自然な場合が多い。経験の上に言葉がある。数学的知識とは構造であり，その構造は具体例に宿っている。その具体例を数学的活動の中で体験して初めて，その構造を体得することができるのである。抽象は具象という衣をまとい，多様な具体例となって具現する。これはまさに抽象化の逆である。
>
> 事象の背後に厳然として存在する数学的構造を数学的活動を通して自ら体感し，得られる数学的体験を言葉・記号と論理で紡ぐ。このように数学的に記述することにより，体験を意識下に入れ，既知の知識との関係においてとらえることができる、すなわち，自らの知識とすることができる。
>
> 数学的知識を具象に宿し，具象に構造を見抜く。この過程により数学的知識が生きてくる。

数学における認識の深まりを助長させる活動はすべて数学的活動と言える。そして、数学的活動を行うことにより数学的知識を体験することにつながり、数学的構造を体得することができる。

平林(1987)は、数学的活動における理論の一つに、ファン・ヒーレの学習水準の理論を取り上げている。平林(1987)は、ファン・ヒーレが設定した幾何における学習水準の５つの区分について、以下のように説明している。(pp. 184-186)

> 第０水準（基礎水準）
>
> これは，子どもが身のまわりのものをその形によって区別している段階である。ここでは，子どもの認識対象は机・窓・本・時計など，その身のまわりのものであり，形はそれらの認識手段，あるいは分類基準として利用されているにすぎない。（中略）
>
> 第１水準
>
> ここでは，これまで身のまわりのものを整理する手段として用いられてきた形，あるいはその表象としての図が，こんどは研究の対象になる。そしてこんどは，その図のもっている性質が，図形の認知・分類の手段として利用される。しかしこの段階では，図形の性質そのものは直接研究の対象になっていない。（中略）

第２水準
ここでは，第１水準において図形研究の観点にすぎなかった図形の「性質」が研究の対象となる。そして，性質間の関係，いうなれば命題がこれらの性質を整理する原理となる。（中略）しかし，命題そのものは，この段階では研究対象ではない。
第３水準
前段階で，性質を整理する原理となっていた命題が，ここでの研究の対象になる。そして，命題を整理する手段，あるいは命題間の関係を認定する手段として，論理がはじめて登場する。（中略）
第４水準
ここでは，第３水準での命題の組織原理であった「論理」が研究の対象になる。すなわち，論理・演繹的体系そのものが研究の対象になるが，それはすでに数学者の水準である。そして学校では，この水準はめったに達成されないとファン・ヒーレは言っている。

それぞれの学習水準においては、水準が上がるごとに、学習するものが身の回りのもの、図、性質、命題、論理という流れで変化していく。それぞれについて学習する際には、その次の水準で学習するものが用いられる。第 0 水準では、「窓は四角いもの」、「時計は丸いもの」というように、身の回りにあるものをその形によって区別している。第 1 水準では、直角が 4 つある図形が長方形、角がなく真ん丸な図形が円というように、性質からそれぞれの図形を区別している。第 2 水準では、「二等辺三角形の底角は等しい」という命題から三角形の 2 辺が等しいという性質や 2 角が等しいという性質がどのような性質であるかを捉えたり、これらの性質は必ず同時に成り立つということを読み取ったりするように、命題から性質の具体的な内容や異なる性質同時の関係について学習している。第 3 水準では、数学における論理を用いて数学の命題の真偽を確かめる段階である。第 4 水準では、数学における論理を探求していくが、これは数学者が行っていることであり、学校ではほとんどこの水準に到達することはない。以上の学習水準は幾何学における学習水準であるが、他の分野においても学習水準が存在すると平林(1987)には記されていた。

学習水準の内容よりも平林(1987)で重要だとされていたのが、その学習水準をどのように高めていくのかということである。平林(1987)は、ファン・ヒーレが挙げた学習水準飛躍をもたらす 4 つの様相について、以下のように述べている。(pp. 190-191)

第一の様相は，≪教示的(informatisch)≫な様相と呼ばれるものである。
これは，実践的になじみ深い言葉でいえば，「話し合い」，あるいは教師が話してきかせることであろう。その水準での新しい言語がどのような文脈で用いられているかを，話し合いを通して子どもにはっきりと知らせることである。ファン・ヒーレにおける思考水準は言語水準でもあった。そして言語の意味の理解は文脈に依存しており，算数・数学での文脈は，日常語的文脈とはかなりかけはなれていることもあるので，新しい言語・記号の導入には，適切な文脈の選択が入念になされねばならない。
第二は，≪制限されたオリエンティールング，または探究(gebundene Orientierung, Exploration)≫といわれる側面である。これは，教師の指示によって，子どもがいろいろな事物について，言語・記号間の関係を全体構造のなかから読みとる活動でもある。ファン・ヒーレは，上位の思考水準においても，具体的な事物の手での操作や実際的活動の必要性を強調しているが，これは注目すべきことである。（中略）
第三は，≪解説(Explizierung)≫の側面である。正確には，これは活動のなかに内在している構造の≪顕在化(Explizitmachung)≫ということである。具体的には，教師の指導のもとに，子どもたちが前のオリエンティールグにおいて発見した規則性を互いに話し合うことによってすすめられる。その場合，お互いの意見の交流のために，正しい専門語を使うことが要求されている。
第四は，≪自由なオリエンティールング(freie Orientierung)≫である。
すでに上の三つの様相において，子どもたちは自分たちのやっていることがわかり，また具体的場面から関係を読みとり，それを表現する言語を獲得している。そして今やこの最後の様相として，当面する学習領域を自由に探索できる状態になっている。そしてその結果，当該領域の全体を展望しうる位置を獲得するのがここでの目標であり，思考水準飛躍の一歩手前である。

第一の様相では、教師が自ら説明、あるいは教師と子どもによる対話を行うことを通して、子どもの数学の学習が促される。第二の様相では、子どもに探究活動を行わせることを通して、数学の内容の理解を促進させる。第三の様相では、第二の様相で行った探究活動を通して得られたことを子ども同士で話し合わせる。第四の様相では、ここまでの様相で学んできたことについて、自由に応用させる。

７．確率概念とその指導について

石橋(2016)は、中等教育における確率概念の定義には、「数学的確率」と「統計的確率」の２つがあるとしている。そして、数学的確率について以下のように説明している。(pp. 133-134)

起こりうるすべての場合が n 通りあり，それらのどの二つも重複しておらず，また，どの場合の起こることも同様に確からしいとする。この n 通りの中で，ある事がら A の起こる場合の数が a 通りであるならば, A の起こる確率は a/n であるという(岡田, 1972)。
この定義には，「同様に確からしい」という前提に問題点がある。まず，事象が連続的に無限に存在する場合

や，画鋲を投げたときに針が上を向く確率など，事象が有限個でもそれらの事象が同等に起こり得るとは考えられない場合には適応できない。また，Laplace は「同様に確からしい」を，「その他のものに優先して生起することが確信できない」としており，その説明には曖昧さがある(松浦，2015)。

「同様に確からしい」ことを前提に求める確率のことを「数学的確率」という。事象が有限個且つすべての事象が同等に起こることを前提としているので、この前提から外れる事象は扱うことができない。

一方で、統計的確率について以下のように説明している。(p.134)

一定の条件のもとで，試行を n 回くり返したとき，A という事象がこの中で a 回起こったとする。n を十分大きくしたとき，相対頻度 a/n の値がほぼ一定の値 p に近づくならば，この p のことを事象 A の起こる確率という(岡田，1972)。

この定義は，数学的確率の問題点を補うものであるが，相対度数の極限の存在するものに対象が限られてしまうこと，また，単一事象の確率を扱えないという問題点がある(松浦，2015)。

試行を十分に繰り返すことで求める確率のことを「統計的確率」という。こちらの確率概念では、試行を十分に繰り返せなかったり、試行を十分に繰り返しても一定の値に収束しなかったりする事象を扱うことができない。

石橋(2016)は、この 2 種類の確率概念があることにより確率の学習に困難が生じる点を指摘している。そして、その困難について「思想的背景」、「判断基準」、「定義方法」の 3 つの観点から解説している。まず、思想的背景の観点については以下のように述べている。(p.134)

数学的確率は，決定論的思考を背景に誕生し，それを内包したものであるのに対し，多数回の試行による相対度数で定義される統計的確率は，偶然性に重きを置いた非決定論的であるといえる(ギリース， 2004)。大滝(2011)はこの 2 つの背景に対し，「確率が偶然を扱う分野であっても少なくとも学校数学で扱う部分においては，その数値は一意に決まる。つまり，非決定論的である偶然やランダム性に，決定論的に数値を与えなければならないというところに，確率の概念形成の困難性の一端があると考えられる。」(p.25)としている。（中略）つまり非決定論的対象に決定論的思考を用いるという思想的背景が，例えば（中略）前の試行が次の試行に影響しないことの理解の困難性になっていることを示唆している。

数学的確率は決定論的に考える確率であり、統計的確率は非決定論的に考える確率であるのだが、学校で扱う確率は非決定論的な事象に対して決定論的に考えるものであるが故に困難が生じる。

次に、判断基準の観点については以下のように述べている。(p.134)

数学的確率は，「無差別の原理」の論理に基づき確率を捉えたものである(ギリース， 2004)。これに対し統計的確率は，「統計的頻度の安定法則」などの経験に基づき確率を説明している(ギリース，2004)。大滝(2011)は，「数学学習における論理的厳密性は，小学校入学以来，漸次上昇していると考えられる。…こうした数学学習の変化の中にあっては，確率を経験的にみなさなければならないということが逆に難しくなると予想される。」(pp.25-26)としており，中等数学において確率が固有に持つ非論理的な側面に，生徒の確率概念の形成の困難性があると指摘している。

数学的確率は論理に基づき判断される確率であり、統計的確率は経験に基づき判断される確率であるのだが、生徒は経験に基づき判断することに慣れていないが故に、統計的確率の理解に困難が生じる。

最後に、定義方法の観点については以下のように述べている。(p.134)

Sfard(Anna Sfard)は，定義などの数学の言語的側面に着目し，同一概念を，対象として構造的に，そして過程として操作的に捉え，さらにコンセプションの形成を，操作的コンセプションから構造的コンセプションへの移行として特徴づけた。大滝(2011)はそれに基づき，数学的確率は全体に対する部分の割合で定義されているため構造的で，統計的確率は一連の試行の結果で定義されているため操作的であると述べている。しかし，哲学的見地では，数学的確率は確率を認識論的に，統計的確率は確率を客観的に解釈するものであることを考慮すると(ギリース， 2004)，詳細には 2 つの定義が同一概念を扱っていない。つまり，一方の定義でしか捉えることのできない確率が生じ得ると考えられるため，操作的コンセプションから構造的コンセプションへの移行が行われないことに，困難性があると解釈している(大滝，2011)。

確率概念の理解は本来、統計的確率から数学的確率への移行を通してなされるのだが、いずれかの確率概念からしか捉えることができない確率ではこの移行がなされず、確率概念の理解に困難が生じる。

以上をまとめると、確率を学習する際、数学的確率を使うことが理にかなっている場面と統計的確率を使うことが理にかなっている場面があるが、この 2 種類の確率が指導では適切に活用されていないことに、確率の学習につまずく要因の 1 つがある。特に、統計的確率は数学的確率と比べて軽視される傾向にあるので、双方の確率概念をバランスよく教えることが重要になる。

また石橋(2016)は、確率概念にかかわる概念として、「偶然概念」と「比例概念」があることにも言及している。そし

て、これらの概念について、以下のように述べている。(p.135)

> 川嵜(1990)は，Piaget(Jean Piaget)の1951年の研究に基づき，確率概念は偶然概念と比例概念の2つの下位概念により構成されるとした。「偶然概念」とは，不確かな現象を偶然として認識することであり，可逆性を持つかどうかで，必然と偶然が総合的に把握され形成される概念である。「比例概念」とは，2つ以上の確率を比較する場合に関連するものであり，部分と全体の関係を理解し，2つ以上の異なった確率を持つ事象を比較できるようになって形成される概念である。
> そして川嵜(1990)は心理学的見地から，中等教育において非決定論的である確率概念は，「世の中には確定的な事態だけでなく偶然的な事態も存在すること」，「それらを数値化すれば一つの数学的体系を構築することができること」を十分に認識することで形成される，つまり，その指導は偶然概念を根幹に据えて扱われるべきであるとしている。しかしその一方で当時の確率指導は，比例概念の形成が大前提となっており，比例概念に基づいて複雑な分数計算が重視されているため，比例概念に比べて偶然概念の扱いが乏しいと述べており，そのことが確率指導における様々な問題点の原因となっていると指摘している。これに関して，平林(1990)は，「その点（極めて難しい，数学としての確率論の教育配慮）では，最も先行することは，順列・組み合わせではなくて，「デタラメ」という概念の理解であろう。解析的には順列・組み合わせが第一歩かもしれないが，実験的にはデタラメの理解，その正しい利用の指導がまずなされるべきであろう」（丸括弧は加筆）(p.414)と述べている。つまり偶然概念を理解させることが，確率の学習の導入において強調されなければならないことを示唆している。またCarvalho(2012)は，偶然概念の理解には，結果が偶然に左右される偶然実験を適宜設けることが重要であるとしており，導入のみならず，学習の過程の途中においても偶然概念を扱うことが求められる。

確率概念は、事象を偶然的に起こったものと認識する偶然概念と、異なる事象同士の関連に着目する比例概念により構成され、このうち偶然概念が確率概念の根幹を成している。しかし、学校では比例概念に重点を置いた指導が成されているため、確率の学習のつまずきへとつながっている。

確率概念の分類については、他にもモデル化の視点からみたものもある。モデル化の視点からみた事象の確率について、石橋(2021)は以下のように述べている。(p.74)

> Pfannkuch & Ziedins (2014) は，事象の確率についての考え方は少なくとも3つあるとしている。第一に，事象の起こる「真の」確率（”true” probability）である。第二に，理論的な確率として知られているモデル確率（model probability）である。モデル確率とは，同様に確からしいことを仮定して導かれる確率である。そして第三に，試行によって得られる経験的確率（empirical probability）である。経験的確率は，アメリカのConnected Mathematics Projectが作成した教材に定義されている語であり，そこでは経験的確率が，試行の総数に対する好都合な（favorable）施行の数の割合として定義されている（Konoldほか，2011）。さらに，モデル確率と経験的確率は，真の確率の見積もり（estimates）であるとし，これらを関連づけることで，真の確率を正しく見積もることができるようになる。

モデル化の視点からみた事象の確率には、真の確率、同様に確からしいことを仮定して導かれるモデル確率、試行によって得られる経験的確率の3つが少なくとも存在し、モデル確率と経験的確率を関連づけることで真の確率を正しく見積もることができる。指導においても、モデル確率と経験的確率を関連づけることを通して真の確率を正しく見積もることができるようにする必要性がある。先程言及した数学的確率はモデル確率、統計的確率は経験的確率に対応している。

また石橋(2021)は、確率を3つの世界で捉える枠組みについても言及している。具体的な内容は以下の通りである。(pp.74-75)

> 五十嵐・宮川（2013）では，確率には，現実世界と数学世界の2つの世界ではなく，現実世界を物質世界と仮想世界に分けた3つの世界を想定できるとしている。まず，物質世界（Physical world）とは，「もの」を実際に見たり触ったり，知覚することのできる世界である。次に，仮想世界（Hypothetical world）とは，物質世界とは異なる想像上の世界で，物質世界には存在しない理想的なものや状況が存在する世界である。そして，数学世界（Mathematical world）とは，数学的対象が存在する世界である。
> 以下では，五十嵐・宮川（2013，p.20）を引用して，3つの世界について具体的に見ていく。学校数学において，物質世界は，さいころを投げるといった実験や1,000回行ったデータ等に見ることができる。実験で使われるさいころは物質世界に存在するものであり，その結果は，そのものを投げた結果であるから，物質世界での操作から得られたものである。つまり，統計的確率は物質世界で実際のものを投げるという操作の結果，得られたものと捉えることができる。一方で，教科書等で扱われる確率の問いは，同様に確からしいことなどの仮定が前提となっているため，仮想世界のものである。物質世界において，それぞれの目が出る確率が等しいさいころは存在しないにもかかわらず，教科書等ではそのようなさいころがあることを前提とする。そのため，教科書等で扱われる確率の現実場面は，物質世界の現実場面とは異なる仮想的・理想的な世界における現実場面である。また，確率の計算や確率空間といった数学的対象やその操作などは数学世界のものである。

確率の世界には、ものを実際に見たり触ったり知覚したりすることのできる「物質世界」、物質世界には存在しない理想的なものや状況が存在する「仮想世界」、数学的対象が存在する「数学世界」の３つがある。そして、モデル化の視点からみた３つの確率と確率における３つの世界を対応させると、経験的確率は実際に試行を行なって得ることから物質世界に、モデル確率は論理的に導くことから数学世界に、真の確率は実験的にも論理的にも導くことができないため仮想世界に対応している。つまり、確率の指導を行う際は、物質世界と仮想世界と数学世界の存在に留意することが大切である。

８．本研究の総括と今後の課題

理解しやすい指導、効果的な数学的活動の展開ということを主眼に置きながら、現在の高校数学の指導や教育全般に求められることも達成できる指導に求められることが、5点あることが分かった。1つ目は、子どもの「新しい価値」を創造させることである。「新しい価値」の創造が教科教育の役割であり、教員による伝達と子どもが主体的に活動する機会のバランスが重要になる。2つ目は、アクティブ・ラーニングを導入することである。アクティブ・ラーニングの導入により学習内容の深い理解や資質・能力の定着につなげることができる。このことを達成するため、子どもが能動的に動く時間を最大限に増やすことや、主体的・協働的な学びが成立していることなどが重要となる。3つ目は、数学的に考える態度を育成させることである。数学的に考える態度育成のため、認知的に考える必要のある活動を行うことや、生徒に自らの考えとその理由を共有させることなどが必要になる。4つ目は、数学を関係的理解によって理解させることである。数学を関係的に理解することで、学習内容を他に応用させることができ、学びを深めることができる。5つ目は、学習水準を考慮した指導を行うことである。数学には学習水準があり、学習水準飛躍の様相もある。子どもがどの学習水準にいるのかを捉え、学習水準飛躍の様相に適合した指導を展開することが重要になる。また、「場合の数と確率」の授業に焦点を当てると、「確率概念には複数の種類が存在すること」を生徒教師ともに認識することも必要であると分かった。「数学的確率」と「統計的確率」や、「真の確率」と「モデル確率」と「経験的確率」など、確率概念には様々な側面がある。様々な確率概念の種類とそれらの違いを生徒に認識させることが、「場合の数と確率」の指導では求められる。

以上の内容の解明が本研究の成果であるが、これらの内容を踏まえた授業計画を行い、実際に授業を行う段階には至っていない。数学の理解を促進させるための数学的活動に求められる要素をどのように組み合わせ、どう展開することが理にかなっているのか、このことを他の論文や授業実践から考えることが今後の課題となる。

参考文献一覧

中央教育審議会(2012). 新たな未来を築くための大学教育の質的転換に向けて～生涯学び続け、主体的に考える力を育成する大学へ～(答申).

中央教育審議会(2016). 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申).

林隆宏(2016). 教科教育の実践の場である学校とは. 日本教科教育学会誌, 39(3), 97-101.

平林一榮(1987). 数学教育の活動主義的展開. 東洋館出版社.

石橋一昴(2016). 中等教育における確率のカリキュラム開発に向けた一考察—確率概念の形成のための定義と偶然概念に焦点を当てて—. 数学教育学研究：全国数学教育学会誌, 22(2), 133-140.

石橋一昴(2021). モデル化の視点からみた中学生の確率の意味理解に関する考察. 数学教育学研究：全国数学教育学会誌, 26(2), 73-81.

工藤与志文, 小野康直(2017). アクティブ・ラーニングの成立条件—東北大学の「教職実践演習」の取り組みから—. 教授学習心理学研究, 13(2), 85-102.

中逸空, 西村圭一, 長尾篤志(2021). 高等学校数学科における数学的に考える態度の育成を目指した授業の特徴－グローバル・ティーチング・インサイト(GTI)授業観察コードを用いた授業分析を通して－. 日本科学教育学会第45回年会論文集, 79-82.

西川純(2015). すぐわかる！できる！アクティブ・ラーニング. 学陽書房.

R, R, Skemp・藤永保, 銀林浩(訳)(1973). 数学学習の心理学. 新曜社.

R, R, Skemp・平林一榮(監訳)(1992). 新しい学習理論にもとづく算数教育－小学校の数学－. 東洋館出版社.

鈴木徹(2016). 学校現場へのアクティブ・ラーニング導入—高校の教員研修を通して—. 学校教育研究, 31, 35-46.

渡邊公夫(2004). 数学的活動とは何か. 長崎栄三, 長尾篤志, 吉田明史, 一楽重雄, 渡邊公夫, 国宗進(編). 授業研究に学ぶ高校数学科の在り方(pp. 48-67).