

その後、Freudenthal は数学学習を組織化 (organization) や、数学化 (mathematization) という用語で特徴づけており、組織化・数学化という活動こそ学習者になされるべきであるとしている。Freudenthal (1973) は科学の進歩における数学化の働きについて以下のように述べている。

科学が単なる収集を脱却するや否や、経験の組織化を巻き込み始める。計算と幾何で組織されるべき経験を示すのは難しくない。数学的な方法を伴って組織化することは、今日では数学化と呼ばれる。しかしながら数学者は、論理的関係により早い進展を見込むや否や現実を無視する傾向にある。数学的経験の蓄積は成立し、その部分が組織化されることを要する。この目的にどんな方法が役立つか？もちろん、再び数学的方法である。これが数学自身の数学化の始まりである。：最初は局所的に一何を定義として選ぶか、そして

定理として何を導くか。(中略) 時が経つにつれ、数学化は明示的もしくは公理的性質 (axiomatic nature) の意識的な定理の組み立てとして、大局的に適用される (pp. 44-45)

以上から、Freudenthal の数学化とは、学習者自身の経験の領域を数学的な方法によって組織化することである。具体的には、平面的形態を図形として捉えることは平面を「数学化」すること、図形を平行四辺形として捉えることは図形を「数学化」すること、様々な平行四辺形から共通する性質を見出して、平行四辺形という定義に到達することは図形を「数学化」すること、前述のような体系を言語学的手段によって整理することもまた「数学化」すること (すなわち「形式化」すること) である。さらに、数学化される経験の領域が現実世界であれば「現実の数学化」、数学の世界であれば「数学の数学化」とそれぞれ特徴づけられる。前述の例でいうと、平面的形態を図形として捉えることが「現実の数学化」であり、図形の諸性質の関係を整理することやさらには公理化や形式化まで至ることが「数学の数学化」である。

(2) Freudenthal の教授学的数学観

Freudenthal は言語や芸術と同様に、数学においても既成としての数学 (ready-made) と、活動としての数学 (acted-out) という2つの側面があるとし、後者の活動としての数学こそ学習者に学ばれるべきであるとする。例えば芸術においては、すでに完成された芸術と、芸術家によってまさに取り組まれている芸術の2種類がある。数学も同様であり、既に完成された閉じた公理系としての数学と、そのような公理系を発明している活動としての数学があるとしている。このような Freudenthal の活動の重視は、以下の文章から読み取れる。

組織化は数学の主要な美であり、可能ならば、生徒もこの美を学ばなければならない。しかしそのとき、私は、組織化の活動を意味し、その結果を意味しない。それら (組織化) の結果は入口も出口もない美しく閉じた体系である。その高い完成では、機械によって処理され得る (handled by)。しかし、機械によってなされ得ることのために、我々人間は必要ない。人間が学ばなければならないのは、閉じた体系としての数学ではなく、むしろ活動としての数学であり、それは現実を数学化するプロセス、そして可能であれば、数学を数学化するプロセスである (Freudenthal, 1968, p. 7)。

また、Freudenthal は、数学の人間性について以下のように述べている。

あなたがたは数学者や自然科学者に研究された対象が、密接に人間性に関係すること、人を含み自然を包む構造体 (fabric) のような、人によって創造された概念的な体系であることを想像することができないであろう (Freudenthal, 1973, p. 113)

以上より、数学は数学者や自然科学者などの人間が研究してきた知恵の結晶であり、その研究は数学者や自然科学者の身の回りの現象を数学の対象にする活動が出发点であった。このことから、数学は人間的側面を持っていることが

分かる。

これらのことから、Freudenthal は「人間の活動としての数学」を基本的立場にしていることが分かる。これは、学習者と数学者を、数学を学ぶ者として同等の存在とみなし、学習者も数学者が行った活動を行う権利があるとする数学教育観である。すなわち、学習者自身があらゆる現象・状況から数学を発明していくこと、すなわち、数学化することを推奨しており、そのような教授原理を「再発明 (re-invention) の原理」と呼んでいる。反対に、学習者自身に数学を発明させるのではなく、最初に定義を与え、そこから応用を与えるような学習を「反教授学的逆転 (antididactic inversion)」と呼び、批判している。

(3) Treffers の漸進的数学化

Freudenthal の数学化を教育の文脈において定式化したと言われるのが、オランダにあるフロイデンタール研究所において中心的な役割を果たした A. Treffers である。Treffers は Freudenthal の数学化について次のように述べている。

一般に、水平的数学化は、数学的手段によって問題を解決することを可能にする領域の図式化 (schematization) から成っているといえる。それに続く数学的处理 (process)、問題の解決、解決の一般化さらなる形式化に関わる活動は、「垂直的」数学化として記述されうる。(中略) 数学的活動をこれら2つの要素に分けることは不自然な操作である。現実にはその区別をするのは難しい、主な理由として図式化と数学的处理は密接に関係しているからである。それでもこの区別には意味がある。構築すること、実験すること、分類することのような活動が、記号化すること、一般化すること、形式化することと同様に数学化の過程によく適合するということを明確にしさえすれば。(Treffers, 1987, p. 70)

以上より、Treffers は Freudenthal の数学化を「水平的数学化」と「垂直的数学化」に2分している。前者は、生徒にとってまだ数学的でない問題を数学的手段によって解決

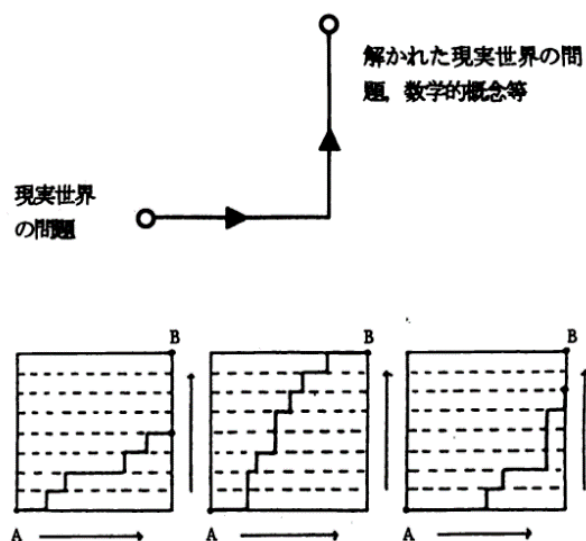


図2 漸進的数学化 (Lange, 1987)

することを可能にする活動であり、後者は、前者の活動に続く実際の数学的処理と解決、さらにはその一般化や形式化という活動である。そして、それらが漸進的になされるという「漸進的数学化（図2）」として捉えている。図2が示すように、漸進的な数学化は、“水平的な数学化”をした後で“鉛直的な数学化”をするという単純な図式ではなく、両者が絡み合いながら少しずつ進んでいく。

(4) 数学化の教育的価値

数学教育の実用的目的に対して「数学化」の実現が貢献しうる価値として、数学を活用する能力・態度を育成することが挙げられる。これは、「数学化」が、現実の事象であれ数学の事象であれ、何らかの対象に対して既習の数学的知識・技能や考え方を活用して対象を整理する活動そのものを指すことに依る。ここでは期待できる価値を2点に分けて挙げる。

第一に、数学を活用する能力・態度を育成する場を実現することである。第1節で述べたように、本研究における「数学化」の過程は数学的モデル化過程を含んでおり、現実事象の探究から始める授業の実現を意図している。本節第1項で述べた数学的な考え方の育成同様、「数学化」を実現することだけでは数学を活用する能力・態度を育成するにあたって十分は言えないが、数学的モデル化が行われる場を実現することで、そこでは数学的モデル化を遂行するための能力の育成を試みるができるようになることが期待できる。また、数学を活用すると言ったときには、その対象として現実事象だけを想定するものではない。清水美憲（2008）は、「事象を数理的に考察する場面は、現実世界の問題の解決に限らず、数学の世界でのことがらを発展的に考察したり一般化して考察したりする場合にも該当する」（p.328）とし、PISA調査は「数学の数学化」の問題のバランスに欠けていると解釈できることを述べている。これに対して本研究で実現を意図する「数学化」は、「数学の数学化」まで含んで考えている。

「数学化」の実現は、とりわけ数学を活用する態度の育成に大きく貢献すると考える。この点に関してはK. Gravemeijer（1997a；1997b）による主張が示唆的である。それを要約すると次のようになる。

すなわち、生徒たちは、既成の解決手続きや所定の解決手続きを適用するという態度で問題解決に臨まず、未知の問題に対して、“「数学化」される状況”として臨むようになる。そこに所定の手続きはなく、自分の持っている全ての知識とストラテジーを持ち込むことになる。そうしてまず問題を理解し、もしこれが以前に自分の行った解決に似ているとわかれれば、それを用いることになる。たとえ利用可能な既成の解決手続きを有していなくとも、このアプローチは、生徒にインフォーマルな解決を見つけさせることを可能にするかもしれない。そして、それ以上に、整理する能力と、新しい問題に「数学化」される状況としてアプローチすることは、既成の解決手続きを適用することより一般的な価値を持つであろうとする（K. Gravemeijer,

1997a, pp. 343-345；1997b, p. 396 要約）。

3. RME (Realistic Mathematical Education)

(1) RME 理論

「RME 理論とはオランダにあるフロイデンタール研究所が提起している（真実的数学教育）のことであり、「人間の活動としての数学」、「水平的数学化」、「垂直的数学化」を特徴としている。

大谷(2016)は、RME 理論を「児童・生徒が、現実感のある問題場面からスタートし、問題場面を自らの考えや表現を用いて表し、教師の導きや児童・生徒との関わりの中で、次第に考え方をより一般的なものへと洗練させながら、最終的に公的な数学的知識や形式化した方法を追発明する活動」であると概括した。また、大谷(2016)は“Realistic”に関して2つの側面があると考察している。一つは数学が日常生活や実社会における事象を組織化する上で有効であること。これは有意味という言葉によって表されるだろう。もう一つは問題場面が児童・生徒にとって現実感を持ち、『イメージする』（zich realiseren）ことができることである。すなわち、同じ問題場面であってもある学習者Aにとって、「reality」として位置づくが、学習者Bにとっては「reality」として位置づかないというように、「reality」は相対的なものである。また、問題場面は必ずしも日常生活の問題に限定されているわけではなく、数学的な問題でも生徒にとってそれが具体的で何が問題であるのかがイメージできればよいのである。これらのことから、問題場面においては“Realistic”に関する2つの側面を考慮し、文脈のある問題(context problem)として扱う。

小林(2007)は、RME 理論を考察する意義として、主としての2点が挙げている。第1に、「数学化」という活動が根幹にあることである。このことから、例えば数学的活動の実現など、現実的な文脈を取り入れることによる教育的価値を高める授業設計に関して示唆を得られることが期待できる。第2に、「水平的数学化」と「垂直的数学化」の両者を志向することである。二つの「数学化」は強く相互作用するが、その上で両者の実現が追求される以上、「現実」と「数学」という2分の解消が試みられていることを期待できる。即ち、「現実の世界」と「数学の世界」の間の隔たりを解消することに関して示唆を得られることが期待できる。

(2) 授業の具体例

RME にはWeb サイトが存在しており、そこではRME 理論を実践した授業内容が公開されている。そこで、「分数の比較」を内容とした素材を検討する。

タイトル；公平な分かち合い

表1 レッスン1：Subway Sandwiches

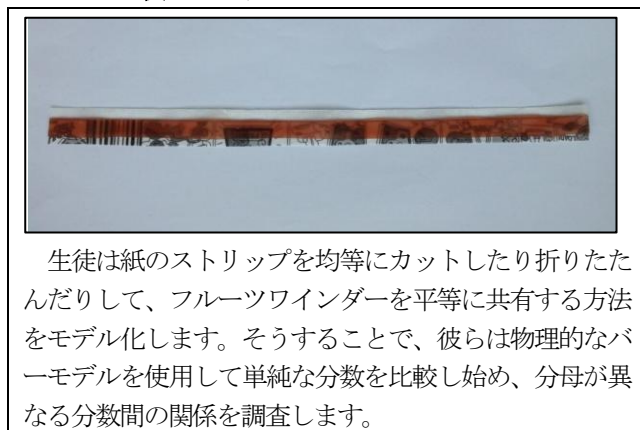
Q. どのグループのティーチングアシスタントが最も多く食べますか？



この問題で生徒たちは、全体を構成するものについての考えを問う問題に取り組む。サブウェイ・サンドイッチという最初のコンテキスト（文脈）は、バーのような可能性があるため、意図的に選ばれている。サンドイッチを描くとき、学習者は必然的に状況を「数学化」し始める。角が四角くなったサンドイッチを描くことで、そのコンテキストの創発的なバーモデルが確立され、次第に他のコンテキストにも使えるようになる。このようなコンテキストは、分かち合いと分数のつながりを築き、学習者は全体との持続的な関係で量のほんの一部（分数）を考える方法を見つけるようにする。

そもそもサブウェイ・サンドイッチという食べ物自体が日本に浸透していないため、日本でこの素材をそのまま使っても“Realistic”にはならないと考える。代替案として日本にとってなじみがあるかは分からないが、麩菓子で代用するのはどうだろうか。

表2 レッスン2: Fruit Winders



生徒は紙のストリップを均等にカットしたり折りたたんだりして、フルーツワインダーを平等に共有する方法をモデル化します。そうすることで、彼らは物理的なバーモデルを使用して単純な分数を比較し始め、分母が異なる分数間の関係を調査します。

物理的なバーモデルを使用することによって、視覚的・感覚的に比較できるのはとても良い。ただ、ここでは Realistic にこだわる必要はあまりないのではないかと考える。それぞれを比較するために何分の一という視点を学習者に与えることができる。

表3 レッスン3: Fruit Juice



生徒は部分的に満たされたフルーツジュースのボトルを比較し、部分としての分数(サンドイッチやフルーツワインダーの<分の>の<の>のように)から位置を示す分数(ボトルの高さ/量の端点)に移行し、数直線上の分数(ポイントとして)に移動します。学生は非公式に非単位分数を比較します。

レッスン1やレッスン2では、水平方向に考えていたが垂直方向にも考えを向けるレッスンとなっている。

非単位分数を比較すると書かれていたが、500ml のペットボトルの5分の1であれば100ml などと変換して分数としての比較ではなく、数字としての比較をする子どもがいるかもしれない。

3. 指導デザイン

(1) 創発的モデル化

先に述べたように RME 理論は生徒たちにとってリアリティがある「現実の世界」から学習を始め、リアリティを徐々に拡張し、最初は形式的な「数学の世界」をその一部にする試みが考えられる。このような指導をデザインするために Gravemeijer は、「導かれた再発明(guided re-invention)」、「教授学的現象学」「創発的モデル化(emergent modeling)」の3つを挙げている。

導かれた再発明とは、数学が発明されてきた過程に似た過程を学習者が経験できるように、指導者が教程を構築することである。ここで、再発明を促進させるために機能するのが「文脈のある問題」である。

教授学的現象学とは、状況に特有のアプローチが一般化されるような問題の状況を、教師が見つけることである。つまり、垂直的数学化の基盤として用いられる典型的な解決手順を、引き起こすことが期待される状況を教師が見つけることであると考えられる。

創発的モデル化とは、学習者がある問題状況に出会った際に、学習者自身が問題を解決するためにモデルを構成し、そのモデルが発達していくことで、よりフォーマルな数学的対象を構成すると考える理論である。モデルはフォーマルな数学的知識と状況に根付いた(situated)知識の間を媒介するものとして見なされる。また、RME モデル論では、教師の役割として、生徒の思考に応じて例えば数学的関係をつかみ始めているのかどうかを決定する必要があることや、新たな「サブモデル」が「ボトムアップ」として経験さ

れているかを判断する必要があるとされている。つまり「数学的リアリティ」と「モデル」という視点は、単元の当初設計だけでなく、実践が進行するにあたって生徒たちの様子をモニターする視点として機能することが求められているのである。

モデルの具体例として挙げられるのは、問題を解くために学習者自身が描く絵や図、そして表、表記など様々なものを含む。モデルにはインフォーマル→フォーマルを橋渡しする役割があることを既に述べた。このようなモデルは橋渡しをする中で、モデルの役割が転換される。このことから、モデルの役割によって活動を以下のように4つの水準に区分している。

1. 課題設定における活動：解釈と解決が、その設定においていかに活動するか理解に依存する。
2. 参照的活動：Model-of が、指導活動において記述される設定における活動を参照する。
3. 一般的活動：Model-for が数学的関係の枠組みを参照する。
4. フォーマルな数学的推論：数学的活動のためのモデル (Model-for) の支えに最早依存しない。



図3 活動の水準 (Gravemeijer, 1999)

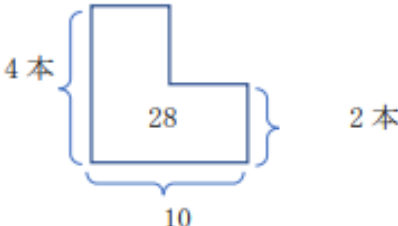
最初に文章題での特別な状況が与えられる。その後モデルが状況下で一般化され、状況に関係なく、それだけで存在するものになっていく。その結果、新たな状況下でも、そのモデルは形式的な数学の理由付けをするためのモデルとしてはたらくことができるようになる。

(2) モデル転換の具体例

鶴亀算を最終的には方程式を用いて解く問題解決過程を具体例として、モデルの転換 (図4) を軸とした授業設計について検討する。

学習者はまず、事象01の文章を読み、問題を把握する。ここで重要なのは、この問題が学習者にとって文脈のある問題として扱われるかということである。このことをRealisticの2つの側面から考察する。イメージできるかに関しては、学習者の経験や興味を十分に把握することによって、教師が学習者にあった問題へと作り替えることが

表4 鶴亀算におけるモデルの転換 (木村, 2022)

	○ 1 : 鶴亀算 鶴と亀が合わせて 10 いて、足の数の合計は 28 です。鶴は何羽いますか。																		
M 1	合わせて 10 で、足は 28 																		
M 2	<table border="1"><tr><td>鶴</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>...</td><td>6</td></tr><tr><td>亀</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>4</td></tr><tr><td>足</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td><td>...</td><td>28</td></tr></table>	鶴	10	9	8	...	6	亀	0	1	2	...	4	足	20	22	24	...	28
鶴	10	9	8	...	6														
亀	0	1	2	...	4														
足	20	22	24	...	28														
M 3																			
M 4	$4(10 - x) + 2x = 28$																		

できると考える。有意味であるかに関しては、教師から一方的に問題が与えられるのではなく、問題を設定する過程を学習者に辿らせることによって解決の必要性を見いだすことができると考える。

次に、学習者は素朴なモデルM1を考える。これはやや抽象化されて○や△といった記号で表現されるかもしれない。さらに、M1の規則性を考察することで、M2のような表を作ることが考えられる。M1, 2の水準では、モデルとして汎用性が低く、まだModel-ofの段階であると考えられる。この水準においては、あくまでも事象を考察することが目的である。ここで、問題の解答が分かってしまう生徒がいるかもしれない。その場合は、一般性や簡潔性など数学のよさに目を向けさせる発問をして、よりよいモデルの発達を促す必要があると考える。

次の水準では、M3のような図を考えるかもしれない。この図は、文脈が変わっても使用可能であるという意味でより汎用性の高いものである。(合わせて10が20に変わっても、足の数が2本と3本に変わっても使用可能である。) また、正式な知識(方程式による解法)にも関連付けしやすい図となっており、Model-forと言えると考える。

そして最終的にM4のようにフォーマルな方程式による解

法へとつながる。ここで重要なのは、フォーマルな解法が学習者にとってもフォーマルな解法として位置付けられているのかということである。具体的には、M4 の方程式を用いた解法よりも M3 の面積図を利用した解法の方が分かりやすいと考える生徒もいるのではないかということだ。このことは、様々な解法を振り返り、一般性や簡潔性という観点から練り上げることによって、フォーマルな解法のよさに気づかせる。

4. 授業設計の枠組み

小林は、前述した4段階の水準は「モデル」を視点とした際の単元全体の進行を考えるにあたって参考となるが、あくまで生徒の活動の水準であるため、指導設計者が何を検討すべきかが見えづらいとし、単元全体の進行を定めるために、以下の3段階に分けて考えている。

表5 指導の段階(小林, 2017)

I. モデルを生徒たちの活動のモデル(Model-of)として生じさせて用いることを可能にする段階
II. モデルの役割を Model-of から Model-for へと転換させる段階
III. モデルが新たな問題の解決や新たな数学の創出に利用される(Model-for)段階

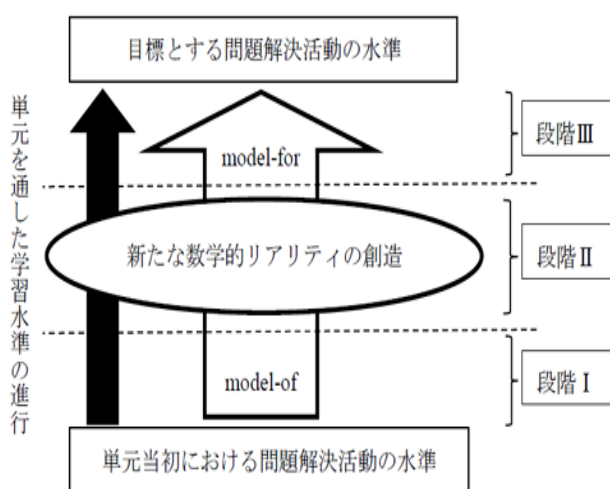


図4 モデルの転換と指導の段階の対応 (小林, 2017)

上記IIは、「モデル」の役割を model-of から model-for へと転換させるための事象の探究を意図的に組み込むことの提案である。もちろん、「モデル」の転換は model-of としてのモデルを用いる経験を重ねて「数学的リアリティ」を創造することによって行われるのであったし、model-of と model-for の区別は生徒の思考に関係するものであったから (K.Gravemeijer, 2007b)、この段階で必ず転換させるということは言えない。しかし、指導設計者としてはこの段階で転換させたいということを意図・想定しておく必要がある。以上のようにして単元全体の進行が定まったら、次は各段階に応じた小単元が「サブモデル」の視点か

ら設計されることになる。そこでは「サブモデル」を、「新たなサブモデルはそれらの意味を以前のサブモデルを用いた以前の経験から引き出す」という原則のもとに設定していくことになる。これを、「サブモデル」もまた model-of から model-for へと転換すると解釈しておく。

「サブモデル」が具体的に、事象の探究における生徒たちの活動の結果として生じ (model-of)、それが新たな問題の解決や新たな数学の創出に利用可能となる (model-for) ように検討することで、各小単元で課す事象の要件が定まってくる。その際、新たな「数学的リアリティ」の創造も、単元全体のどこかで一気になされるものとはとらえず、小単元を積み重ねることで徐々になされていくととらえる。つまり、局所的な視点で「サブモデル」が「数学的リアリティ」の創造と反動的に関係されながらその役割を model-of から model-for へと転換させることを繰り返すことで、単元全体を通して「モデル」がその役割を model-of から model-for へと転換させていくという「入れ子」の関係にあると考えるのである。

表6 授業設計の枠組み(小林, 2017)

1. 単元の全体像の分析

1-1. 目標とする問題解決活動および追発明対象とする数学の分析

⇒単元の目標は何か

⇒何を整理することで生じるのか

⇒生徒たちにとって新たに実感されるべき数学的関係の枠組みと対応する数学的対象は何か

1-2. 全体を束ねる概念としてのモデルの設定

⇒生徒たちの活動の結果として生じ (model-of)、新たな数学を創出して目標とする問題解決活動を遂行するために利用可能となる (model-for) モデルは何か

2. 授業への具体化

2-1. 大局的な指導の展開の設計

⇒モデルは具体的にどう転換していくべきか

⇒その各段階において探求すべき事象の要件は何か

2-2. 局所的な指導の展開の設計

⇒モデルはサブモデルとしていかに展開されるか

⇒各サブモデルが現れるための事象は何か

3. 授業実践におけるモニター

⇒数学的リアリティは想像されそうであるのか

⇒サブモデルは以前のサブモデルを用いた経験を意味しているのか

⇒当初設計の修正が必要であるのか

5. 中学校「二次関数」の授業設計

単元を通して「数学化」を実現するための授業設計の枠組み(小林, 2017)に従って、単元「関数 $y=ax^2$ 」において「数学化」を実現するための授業設計を行う。

(1) 単元の全体像の分析

①単元の目標

事象を「関数 $y=ax^2$ として捉えて変化を分析する方法」の獲得が単元「関数 $y=ax^2$ 」における目標であり、追発明の対象である。その方法とは具体的に、i) 事象を関数 $y=ax^2$ として捉えて、それをグラフとして表現し考察すること、ii) 事象を関数 $y=ax^2$ として捉えて、それを式として表現し考察すること、の両方を意味する。

②「関数 $y=ax^2$ として捉えて変化を分析する方法」は何をどのように整理した結果として生ずるか

i, ii のいずれにしても鍵となるのは関数 $y=ax^2$ として捉えることである。

i) 二つの数量の変化や対応を視覚化した結果である

ii) 二つの数量の変化や対応を定式化した結果である

③単元「関数 $y=ax^2$ 」における「数学的リアリティ」と「モデル」

新たな「数学的リアリティ」として、数学的関係を「変化の割合が一定ではない関数」に焦点化して捉えることにする。

次にモデルを設定する。生徒たちの活動から生じ、「関数 $y=ax^2$ として捉えて変化を分析する方法」を支える基盤は、「変化の規則」であるだろう。表(数値表現)で与えられたデータに対して局所的な変化を探ることは、生徒がすでに有している「モデル」であり、生徒の活動の結果(model-of)として生じうるものである。一方でその「モデル」は、関数 $y=ax^2$ を表すための手段として、「関数 $y=ax^2$ として捉えて変化を分析する方法」を支える(model-for)。「変化の規則」という局所的な変化をとらえることによって大域的变化を把握するための基盤となっていくことを期待できる。

(2)授業へ具体化

①大域的な指導の展開

単元「関数 $y=ax^2$ 」における「変化の規則」という「モデル」で具体化すると次のようになる。

表7 指導の段階

I. 「変化の規則」を生徒たちの活動のモデル(model-of)として生じさせて用いることを可能にする段階
II. 「変化の規則」の役割を model-of から model-for へと転換させる段階
III. 「変換の規則」が「関数 $y=ax^2$ として捉え、変化を分析する方法」の創出に利用される(model-for)段階

すなわち、まずは生徒が持っている、変化の規則を調べるという素朴なアイデアが活動の結果として生じるようにする。そのためには、変化の規則の意味が文脈によって規定されるようなものや、表(数値表現)が探究対象となるような事象の探究を課す必要がある。特に、変化の規則の意味が文脈によって規定される事象を探究対象とすることで、変化の規則に明確に焦点化することができるようになるだろう。

そうして素朴に生じた「変化の規則」が「関数 $y=ax^2$ と

して捉え、変化を分析する方法」の創出や利用を支える(model-for)ように転換していくことは、もちろんⅠからの経験の蓄積が不可欠なわけであるが、Ⅱはその転換にあたって決定的な役割を果たす指導を行おうとするものである。単元「関数 $y=ax^2$ 」においてそれは、「関数 $y=ax^2$ の性質」の指導である。つまり、Ⅱでは、整理するツールとして「関数 $y=ax^2$ の性質」が創出されるような事象の探究を課す必要がある。

それを受けてⅢでは、特に「関数 $y=ax^2$ の性質」によって、事象に対する予測や解決が可能になることを意図している。ここでは、事象に対する予測や解決に意味があることはもちろん、比較的予測・解決しやすい事象の探究を課せるとよいと考えられる。

②局所的な指導の展開

大域的な指導の展開はどのように具体化されるのか。

「変化の規則」が具体的にはどのようにサブモデルとして展開されるのかを検討することによって局所的な指導の展開を設計する。

ここまでおおまかに言及してきた「変化の規則」の具体的な現れは、最も素朴な表現としての表での表現とグラフでの表現、式での表現をとりうる。ここで「変化の規則」と言ったときに、比例定数が問題になる。それは比例定数の符号であつたり、数値であつたりする。

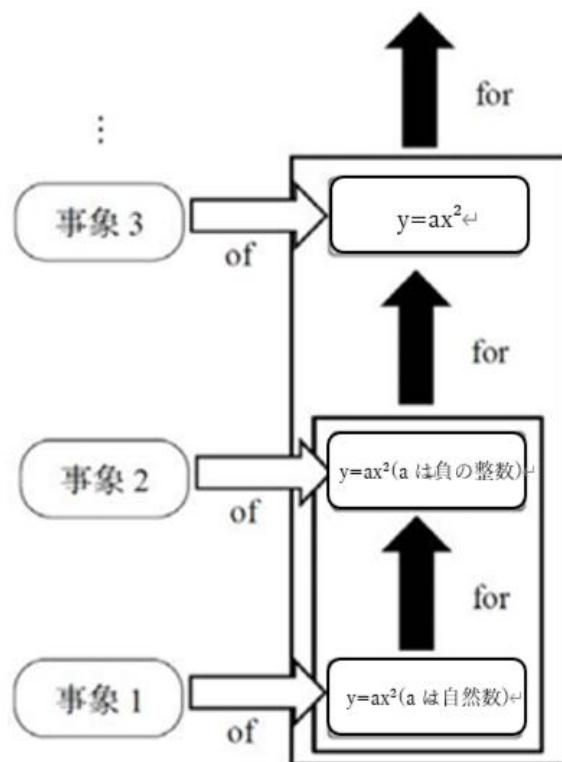


図5 「サブモデル」の転換の図式

これらのことから図5のような「サブモデル」の展開を想定できる。それは例えば、式での表現において比例定数が自然数である事象の探究の結果として生じた model-of が、符号が負であつたり数値が整数でなかったりする事象の探究で model-for として利用されるという構図である。

これはグラフでの表現でも同様だと考えられる。特に「関数 $y=ax^2$ として捉え、変化を考察する方法」の創出を目的とすると、式での表現とグラフでの表現およびそれらの関係に焦点がある。

それぞれの事象を探究する小単位において、その探究を通して創出を意図する内容を項目として並べると次のとおりである。あくまでもこれは「数理化」された結果としての数学を項目として整理している。

表8 指導の各段階に位置付ける小単位

	内容	創出対象
段階Ⅰ	斜面を転がる物体の運動	「関数 $y=ax^2$ 」式やグラフでの表現
段階Ⅱ	放物線	比例定数の絶対値と符号 y 軸についての対称性
段階Ⅲ	制動距離	増減と変域の関係 変化の割合が一定ではない

段階Ⅰでは、斜面を転がる物体の運動を扱う。扱う意図としては、斜面をころがる物の速度がどんどん速くなっていくことや、進む距離が長くなっていくことは子どもたちにとっても、日常の場面で想像のしやすいことだと考える。また、教科書の図や黒板等で子どもたちが実際に長さを測って確認する活動を通して扱うことができるからだと考え。

式が $y=2x^2$ であることについては導入の問題であるので、比例定数が正の整数になる例を考えることで、子どもたちが表のなかに出てくる数字の規則性に気付きやすいようにする。

段階Ⅱでは、Ⅰで創出対象であった式やグラフを探究内容として扱う。扱う意図としては、既習である比例、反比例、一次関数の特徴を復習するとともに、これまでとの違いを明確にしていく。ここでは、比例定数が変化したときにグラフの形状がどのように変化するのかも確認しておきたい。

段階Ⅲでは、制動距離を扱う。探究内容は制動距離を求めることに加えて、(タイヤ)における制動距離の比較をさせて、どのタイヤが優れているかを考えさせる。扱う意図としては、段階Ⅰの復習として、2つの数量を二次関数として捉え、式として表現する活動が内包されるような問題を設定する。そして、段階Ⅱで創出された増減と変域の関係を活用させるために車種ごとの比較を行う。

9. まとめ

本研究の目的は、学習者自身が実社会との関わりを意識して問題を発見・解決していく授業を設計することであった。そのために、フロイデンタールの数学観やRMEについて検討してきた。その結果、中学校数学科「関数 $y=ax^2$ 」の単位において、小林(2017)の授業設計の枠組みにおける

授業への具体化まで考察することができた。

今後の課題としては、単元「関数 $y=ax^2$ 」における授業設計を最後まで終わらせ、実際に授業を実践することである。

主な参考文献

Freudenthal, H.(1968).Why to teach mathematics so as to be useful. Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8.

Freudenthal,H.(1971).Geometry between the Devil and the Deep Sea, Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435.

Freudenthal,H.(1973).Mathematics as an Educational Task. Dordrecht-Holland: D.Reidel.

Freudenthal,H.(1978).Weeding and Sowing -Preface to a Science of Mathematical Education-. Dordrecht Holland: D.Reidel.

Freudenthal,H.(1983).Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht Holland: D.Reidel.

Freudenthal,H.(1991). Revisiting Mathematics Education—China Lectures —. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer,K.(1999).How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1, 155–177.

Gravemeijer,K.(2007a).Emergent modeling and iterative process of design and improvement in mathematics education.,筑波大学・APEC 国際会議講演会資料.

Gravemeijer,K.(2007b).Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In Blum, W.,Galbraith, P.L.,Henn,H-W.& Niss, M. (eds.) Modelling and Applications in Mathematics Education(pp.137-144). The 14th ICMI Study. New ICMI Study series10. NewYork: Springer.

Treffers,A.(1987).Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction-the Wiskobas Project. Dordrecht Holland: D.Reidel..

小林廉(2017). 数学科授業における「数理化」の実現に関する研究 日本数学教育学会誌数学教育, 97, 29-37.

文部科学省・国立教育政策研究所(2019).「国際数学・理科教育動向調査(TIMSS2019)のポイント」. <https://www.nier.go.jp/timss/2019/point.pdf> (2025.1.317 参照)

文部科学省(2017). 学習指導要領解説数学編. https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2019/03/18/1387018_004.pdf (2025.1.31 参照)

大谷実 (2016). オランダの数学教育の動向: Realistic Mathematics Education の理論と実践. 筑波教育学研究, 14, 5-25. <https://doi.org/10.15068/00155380>

清野辰彦・大野桂・越後佳宏(2008).小学校算数科における数理化を重視した学習指導に関する研究：わり算の筆算の創造に焦点をあてて. 日本数学教育学会誌算数教育, 90(4),22-32. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.4_22

清水美恵(2008).「今日的数学的リテラシー論からみた学校数学の現状と課題」,『科学教育研究』,32(4),321-329.