

新たな問いを見出す問題解決の授業に関する研究

自然科学系サブプログラム（算数・数学）

赤塚 久俊

【指導教員】 二宮 裕之 飛田 明彦 西澤 由輔

【キーワード】 問題解決 問題づくり オープンエンド 問題設定

1. はじめに

中学校学習指導要領解説数学編(文部科学省, 2018)では、数学的活動における問題発見・解決の過程を、身近な事象から数学の問題を見出し解決するプロセスと、数学の事象の中から新たな数学の問題を見出し解決するプロセスの2つを示している。(図1)

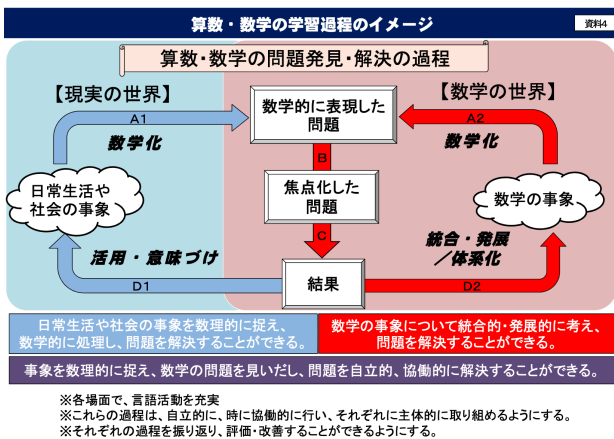


図1 数学的活動における2つの過程
(文部科学省, 2018, p. 23)

左のサイクルでは身近な事象から算数の問題を見出し解決するプロセスを示しており、右のサイクルでは数学の事象の中から新たな数学の問題を見出し解決するプロセスを示している。これら両方のサイクルに共通する、生徒たちが『問いを見いだす』取り組みが問題解決の出発点であると考えられる。赤塚(2023)が埼玉県内の中学校第2学年「連立方程式」において、4で後述する問題設定を用いた研究授業を行った。その際、生徒自身で問題づくりを行った際に、文字の係数が揃っていない場合の連立方程式の解法に関する新たな問いを見出すことができた。一方でこのような数学的に価値の高い新たな問いを見出せた生徒は少数であった。

そのため本稿では、多くの生徒が新たな問いを見出すためにはどのような視点が大切なのかを検討する。そして新たな問いを見出すための問題解決の授業をオープンエンドな問題をもとに検討することで、多くの生徒が新たな問いを見出すために重要となる視点を見出すことを目的とする。

2. 問題解決

(1) ポリアの4段階

現在行われている問題解決学習のもととなっているのがポリアの4段階である。Polya(1954)は数学的問題解決の過程について4つの段階があることを示した。第一に「問題を理解する」段階、第二に「計画をたてる」段階、第三に「計画を実行する」段階、第四に「得られた解答を振り返り、もう一度検討する」段階である。

①「問題を理解する」段階

第一の「問題を理解する」段階では問題を理解する上で行う思考のプロセスと問題の設定についてまとめている。Polya(1954)は問題の設定について「問題はむずかし過ぎもせず、といってやさしすぎもせず、自然で面白く、時には巧みに表現されていることが望ましい。」(Polya, p. 10)と述べている。また、「未知のものは何か、与えられているものは何か、条件は何か。」(Polya, p. 11)という問いを教師は常に生徒に投げかけ、思考させることの重要性を述べている。

②「計画をたてる」段階

第二の「計画をたてる」段階では、理解した問題から問題解決の計画を立てる思考プロセスを示した。

Polya(1954)は問題解決の計画をたてることの重要性について「問題を解くことの大部分はどんな計画をたてたらよいかということを考えつくことにあるといってよい。そのような考えは少しずつでき上って行くものである。しかし時には幾度もやり直したり迷ったりした場面にたちまち素晴らしい思いつきが浮かんでくることもある。」(Polya, p. 12)と述べている。そして計画をたてる上での出発点について「数学の問題を解くのに必要な材料は前にといたことのある問題とか、証明したことのある定理のような既存の知識の中から適当に選び出されたものでなければならない。したがって関連した問題を知っているかという問題から出発するのがよい。」(Polya, p. 13)と述べている。

③「計画を実行する」段階

第三に「計画を実行する」段階、では第二段階で行った計画をもとに実行を行う。Polya(1954)は「計画を実行する」際に行うべきことを以下のように述べている。「計画は大体の輪郭を与えるものであって、詳細はこの輪郭の中に納まらなければならない。そこでわれわれはその詳細を一步一步芯棒よくたしかめてすべてが完全にはつきりとする迄調べなければならない。間違いがまぎれ込むようなあやしげ

な隅々が残らないようにすべきである。」(Polya, p. 16)

その上で計画を実行する際に「一步一步**各段階を検討し**確かめながらすすむことを注意しなければならない。」(Polya, p. 17)と述べている。

④「得られた解答を振り返り、もう一度検討する」段階

第四に「得られた解答を振り返り、もう一度検討する」段階について、Polya(1954)は「解ができ上がった時にこれを振り返り、結果を調べ直してそれ迄にたどった道を見直すことは、かれらの知識をいっそうたしかなものにし、問題をとく能力をゆたかにするものである。」としている。そのため、学生が「得られた解答を振り返り、もう一度検討する」視点を次のように示した「**結果が正しいかどうかをためすことができるか、議論が正しいかどうかをためすことができるか。(中略)同じ結果を違った仕方でも導くことができるのか。**」(Polya, p. 19)

以上のことからポリアの4段階では問題を解決する際の思考プロセスが明らかになった。しかしポリアの問題解決では、与えられた問題に対して、どのように解決していくのが前提となっている。近年、文部科学省(2017)などで求められている「問いを見いだす」過程については、挙げられていない。

(2) 相馬一彦氏の問題解決

相馬(1983)は問題解決において、「なぜ？」という疑問をもとにして、筋道を立てて問題を解決していく過程が大切であると示した。その上で問題解決とは「教師が問題の解決過程を説明して、それを覚えさせるという教師主導の指導に対して、生徒が自ら考え、問題を解決していくという意味での『問題の解決過程を重視する指導』」と捉えている。

また、相馬(2020)は「問題解決の授業」について、「数学的活動を通した授業を日常的に『主体的・対話的で深い学び』を実現するための学習指導法である。」(相馬, p. 16)と示し、「問題解決の授業」について具体的に次のように述べている。

『問題解決の授業』では、授業のはじめに問題を提示し、そこから課題を明確にして、個人や集団で解決に向けて考え合う学習活動が行われる。(中略)問題の解決過程で新たな知識や技能、数学的な見方や考え方などを同時に身に付けさせていく学習指導である。(相馬, p. 16-18)

そして相馬(2020)は問題と課題の関係を次のように示した。(図2)

問題……考えるきっかけを与える問い(教師が提示する)
↓
課題……問題の解決過程で生じた疑問や明らかにすべき事柄

図2 問題と課題の関係(相馬, 2020, p. 16)

つまり生徒にとっての課題を引き出すためのきっかけになるのが問題であり、はじめに提示する問題は、単なる例題

や練習問題ではないことがわかる。そのため相馬(2020)は問題を解決することが目的ではなく、課題を解決することが「問題解決の授業」の目的であるとわかる。

また相馬(2020)は「問題解決の授業」の指導過程を生徒の視点から図3のようにまとめている。

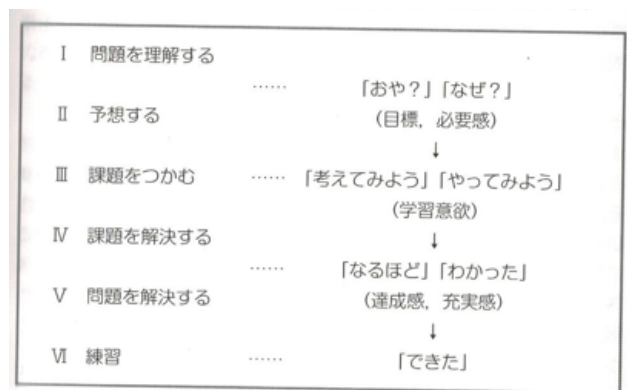


図3「問題解決の授業」の指導過程(相馬, 2020, p. 19)

ただし相馬(2020)は「この指導過程はあくまでも基本になるものであり、I～VIの『型』に縛られるものではない。指導目標や問題の質、生徒の実態、指導時間などに応じて、軽重をつけたり変更したりするなど柔軟にとらえる必要がある。」(相馬, p. 19)と示している。

以上のことから相馬氏の考える問題解決は問題解決の過程を重視し、教師が問題を提示し、課題を明確化する。その後、個人思考やグループ活動を通して、課題の解決に向けて学習活動を行っている。

3. 問題解決における「問題」の条件

Polya(1954)は「問題」を「決定問題」と「証明問題」の2種類に分けた。「決定問題」は問題の中の未知数、求めるもの、あるいは必要なものなどの未知なるものを見つけることが目的であり、「証明問題」は命題が正しいか正しくないかを示すことが目的であると述べている。(Polya, p. 108)

相馬(1983)は問題解決における「問題」の条件について次の6点を示した。

- ア 数学教育の系統性の中に位置づけられる問題
- イ 何を解決すればよいのかという目標がはっきりしている問題
- ウ 解決の必要感を持たせることのできる問題
- エ その問題を解決していく中で、指導の目標が達成されるような問題、つまり[課題]を含む問題
- オ 既習の知識や経験を生かすことのできる問題
- カ 解決の方法が一通りではなく、多様なアプローチのできる問題

また、相馬(1983)はいつでもこの6つの条件をすべて満たすような問題を作れるわけではないとした上で、次のような観点で問題を作成することが多いと示した。

①できるだけ「～は何度か」,「～の長さを求めよ」という求答問題や,「～でよいだろうか」,「～と等しいのはどれか」という判断を求めるような問題にする。生徒にとって目標がはっきりすることと,「予想」の違いが明確になり,問題意識を持たせやすいからである。

②①と関連するが,結論を与えてしまわず,結論そのものを予想させるような問題にする。

③教科書の練習問題や,章のまとめの問題の形を変えて上記の条件を満たすような問題を作る。

その上で相馬(2011)は「問題」の条件について,子どもと教師の両面から検討する必要があると示したうえで,よい問題の条件を2つ挙げている。(相馬, p. 17)

①子どもの学習意欲を引き出すことのできる問題

②問題の解決過程で新たな指導内容(知識や技能, 見方や考え方)を身に付けさせることのできる問題

また相馬(2011)はよい問題の2つの条件を満たす「問題」をつくるためには,「予想」を取り入れることが有効であると指摘する。その上で次の2点を挙げている。

①誰でも予想できるような問題

②異なる予想が生じるような問題

以上より問題を設定する上で,生徒がその問題を解決しようという必要感を持ち,何が問題で,何を解決すればよいのか,という目標を意識させることが重要である。また「問題」の条件について,子どもと教師の両方から検討を進め,生徒の予想を取り入れる問題が有効である。

4. 統合・発展

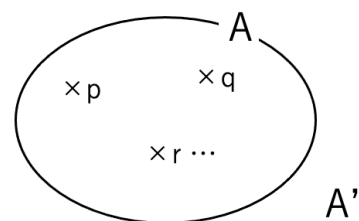
中島(2015)は,統合の位置づけについて以下のように述べている。

「統合的・発展的～」といっても,単に二つの観点を並列したものとして読みとるよりは,「統合といったことによる発展的～」としてよみとることが望ましい。すなわち,発展的な考察ということは,固定的・終局的なこととしてみないということを目指しており,その「発展的」ということが,算数・数学の場合には具体的にどんな方向であるべきかを示す観点(価値観)の代表的なものとして,「統合」ということをあげていると考えるようにしたい。(中島, 2015, p.127)

そして中島(2015)は「統合」が起こる場面として次の3つが考えられるとした。

①集合による統合

まず1つ目が「集合による統合」である。中島(2015)は「集合による統合」について次のようにイメージし,述べた。



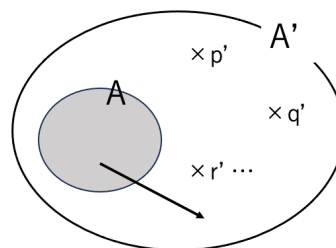
[Aという概念でまとめる]

図4 集合による統合のイメージ(中島,2015, p.127)

はじめは,異なったものとしてとらえられていたものについて,ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合である。これは,図3.1でもわかるように「集合の考え」によって新しく概念などをつくる場合とほぼ同じであって,いわば,狭い意味での統合にあたる。(中島,2015, p.127)

②拡張による統合

2つ目が「拡張による統合」である。中島(2015)は「拡張による統合」について次のようにイメージし,述べた。



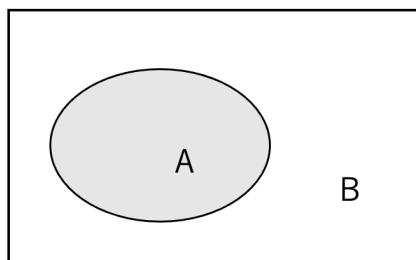
[Aを含むA'を新しく考えてまとめる]

図5 拡張による統合のイメージ(中島,2015, p.128)

はじめに考えた概念や形式が,もっと広い範囲(はじめの考えでは含められない範囲のものまで)に適用できるようにするために,はじめの概念の意味や形式を一般化して,もとのものも含めてまとめる場合である(図3-4)。(中島,2015, p.128)

③補完による統合

3つ目が「補完による統合」である。中島(2015)は「補完による統合」について次のようにイメージし,述べた。



[Aに対して、Bを補って（補集合にあたるものを考えて）完全にする]

図6 補完による統合のイメージ(中島,2015,p.129)

すでに知っている概念や形式だけでは、適用できない場合が起こるとき、補うものを加えて、「完全なる」ようにまとめる場合である(図3.3)。(中島,2015,p.128)

一方、片桐(2004)は統合について次のような考え方であると示した。

統合的な考え方というのは、多くの事柄を個々のばらばらにしておかないで、より広い観点から、それらの本質的な共通性を抽象し、それによって、同じものとしてまとめていこうとする考え方である。(片桐,2004,p.48)

さらに「統合」において3つのタイプがあるとし、次のように示した。

[統合Ⅰ型] (高次の統合)

幾つかの事柄（それは概念や原理・法則、さらに理論、考え方などいろいろあろう）があるとき、これをより広い、より高い観点から見て、それらに共通な本質を見出し、これによって、より一般的なもの（S）にまとめるようにしようとする考え方である。(片桐,2004,p.49)

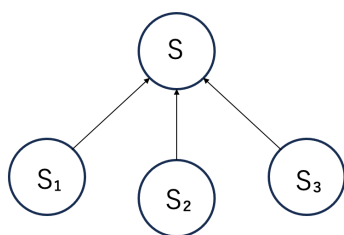


図7 高次の統合のイメージ(片桐,2004,p.49)

[統合Ⅱ型] (包括的統合)

幾つかの事柄 S_1 、 S_2 、 S_3 を見直すことによって、 S_1 や S_2 をその中の1つの S_3 に統合する。(片桐,2004,p.49)

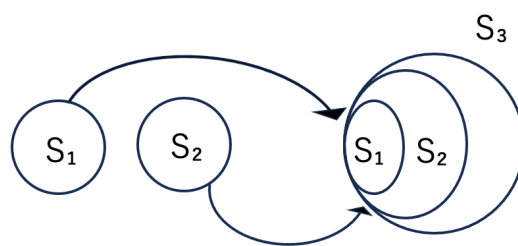


図8 包括的統合のイメージ(片桐,2004,p.49)

[統合Ⅲ型] (拡張的な考え方)

ある事柄がわかっているとき、これを含むより広い範囲まで、それがいえるようにするために、条件を少し変えてより包括的なものにする。すなわち、新しいものを次々と取り入れてまとめていこうとする考え方である。これは**拡張的な考え方**といえるものであって、この中に発展的な面も見られる。(片桐,2004,p.49)

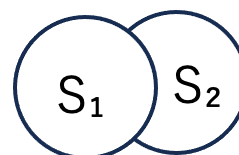


図9 拡張的な考え方のイメージ(片桐,2004,p.49)

中島(2004)は発展について統合と並列で捉えるのではなく、「統合といった観点による発展的な考察」とよみとることが望ましいとした上で次のようにとらえた。

発展的な考察ということは、上で説明したように、固定的、終局的なこととしてみないということを指しており、その「発展的」ということが、算数・数学の場合には具体的にどんな方向であるべきかを示す観点（価値観）の代表的なものとして、「統合」ということをあげていると考えるようにしたい。(中島,2015,p.127)

片桐(2004)は発展的な考え方について次のように示した。

1つのことが得られても、さらによりよい方法を求めたり、これを基にして、より一般的な、より新しいものを発見していこうとする考え方が、発展的な考え方である。発展的な考え方には、2つの型が考えられる。

発展のⅠ型：広い意味での問題の条件を、変えてみること。

ここでの条件を変えてみるというのは、

(1) 条件の一部を他のものに置き換えてみる。または条件をゆるめてみる。

(2) 問題場面を変えてみる。ということである。

発展のⅡ型：思考の観点を変えてみる。(片桐,2004,p.51-52)

また文部科学省(2018)は発展的に考えることについて次

のように示した。

数学を既成のもとみなしたり、固定的な確定的なもの
とみなしたりせず、新たな概念、原理や法則などを創造
しようとするのである。(文部科学省,2018,p.21)

さらに文部科学省(2018)は統合・発展を図る上で大切な視
点について次のように示した。

数学の学習ではこのように創造的な発展を図るととも
に、創造したものをより高い、あるいはより広い観点か
ら統合してみられるようにすることが大切である。(文部
科学省,2018,p.22)

今回の学習指導要領改訂のポイントの一つである統合
的・発展的考え方について、発展的な考えを育てる上で広い
視点から捉え直すことが大切である。そのためには、条件を
弛めたり、条件を変更することなどで問題を振り返り、新た
に捉え直すことができ、新たな問いを見いだすことにつな
がる。さらに新たな問題へと統合的・発展的に考察すること
が必要である。

5. 「問題」の条件を生かす問題設定の検討

(1) ブラウン・ワルターの「問題設定」

ブラウン・ワルター(1990)は問題解決と問題設定を結び
つけることで問題設定の重要性を理解できるとした上で、
問題解決の中で2つの方法で深く埋蔵されていると次のよ
うに指摘した。

第一は、問題解決過程そのもののなかで、新しい問題
(あるいは問題群)を設定することによってその仕事を再
構成しないでは、いかなる新しい問題を解くことも不可
能だということである。(中略)第二には、よくあること
だが、1つの問題を解いたと思ったあとでも、まったく
新しい組の問題を作って、それを分析しようとしなけれ
ば、自分のやったことの重要性が十分にわからないも
のである。(ブラウン・ワルター、1990、p. 2)

ブラウン・ワルター(1990)はより具体的な問題設定の方
略として「What-If-Not?」と呼ばれる問題設定方略を提案
した。この問題設定方略について次のように第0水準から
第IV水準までに分類した。

第0水準	出発点を選ぶ
第I水準	属性の目録づくり
第II水準	What -If -Not
第III水準	問いをつくるあるいは問題設定
第IV水準	問題分析

図10 問題設定方略(ブラウン・ワルター、1990、p. 78)

第I水準の「属性の目録づくり」では「もの」が何であ
るかについて、多くの違った解釈を与えるとともに、属性
とは何を意味するのかを具体的に列挙することである。

第II水準の「What -If -Not」では第I水準で挙げた属性
の中から一つ選び、「What -If -Not(もしその属性がそうで
なければそれはどうなるのか)」と問うことである。

第III水準「問いをつくるあるいは問題設定」では第II水
準で行った「What -If -Not」を行った属性に対し、新たな
属性を挙げ、問題を設定することである。

第IV水準「問題分析」では、もとのテーマの模倣をしな
がら、あるテーマの変形を分析することで、より深い理解
を促すことにつながる。

(2) 竹内・沢田の「問題設定」

竹内・沢田(1984)はこれまでの児童・生徒が問題を与え
られ、解決して終わりにになってしまう授業では、生徒が問題
を自分のものとして受けとめられないことを危惧し、問題の
扱いを「受身的・完結的」なものから「能動的・発展的」な
ものへの転換が必要であると指摘した。また「児童・生徒に、
与えられた1つの問題(この問題を原問題または原題と呼
ぶことにする)から出発して、その問題の構成要素となっ
ている部分を、類似なものや、より一般的なもの等に置きか
えたり、その問題の逆を考えたりすること等を通して、新し
い問題をつくり、自ら解決しようとするような主体的な学
習活動をさせること」(竹内・沢田、p. 25)が必要であるとし
た。竹内・沢田(1984)はこのような学習活動を中心とした指導
を「問題の発展的な扱いによる授業」と捉え、次のような授
業の展開過程を示した。

①原問題の解決

まず原問題を提示し、個別に自力解決させる。その後意
見の共有を行い、解決の振り返り、問題の着目点、解決の
アイデアを明確におさえる。

②問題づくり

原問題をもとにして新しい問題をつくるよう発問し、ま
ず個別に取り組みせ、児童・生徒の様子をチェックする。
例示や助言を与え、できるだけ多様な問題をつくるように
促す。

③つくった問題の発表と分類・整理

児童・生徒につくった問題を発表させ、それらを原問題
と対比させながら分類・整理させる。そして、新しい問題
が原問題をどのように発展させたのかを捉えさせ、問題を
どのように発展させ得るのかを意識づけさせる。

④つくった問題の解決

児童・生徒のつくった多様な問題の中から、みんなで共
通に解決する問題を選び、その解決を行う。そして原問題
との関連で、何が新しく知見として得られたのかを捉えさ
せる。

⑤まとめと発展

学習の過程を振り返り、問題づくりの方略を確認させると
ともに、原問題と新しくつくった問題とを解決すること
によって、問題の内容・構造をより深く理解することがで

きることを感得させ、発展的に考察することの意義を掴ませる。さらには解いた問題の第2次原問題として、次々と連続して発展させていくよう促す。

以上をもとに、生徒たちが問いを見いだし解決するための「問題設定」をするうえで、次の2点が大切であると考ええる。まず1点目は、その問題を「解決すべき問題」として生徒自身が捉えること。2点目は、多様な視点から捉え、思考できるような問いを考えさせること。この2点をもとに「問題設定」について次の4つの段階に分けて考察する。

(1) 問題(原問題)を解決する

問題(原問題)の解決を通して、考えるきっかけを与える。そして生徒自身で「解決すべき問題」として捉えさせる。

(2) 解決された原問題を発展的に考える

(1)で解決した問題をもとに、問いを発展させる新たな視点(What-If-Not)で考え、それを生徒同士で共有させる。これにより多様な視点から問題を捉えることができ、個人だけでは思いつかなかった考えや気づきを得られる。

(3) 新たな問題をつくる

(2)で行った生徒同士の共有をもとに新たな視点から原問題を捉え直し、問題の条件や一部分を変更させて新たな問題をつくらせる。

(4) 新たな問題を解決する

(3)で作成した問題を他者と共有し、協働的な数学的活動を促す。また得られ気づきをクラス全体で共有・整理し、自分の考えを客観的に確認する。そして再び生徒同士が協働することで多面的・多角的思考から再思考することができ、新たな問いを見いだすことができると考える。そして問題を解決して終わりではなく、そこから新たに問題設定し、問題解決する流れを繰り返すことが必要である。

これらの数学的活動を通して生徒たち自身で「新たな視点」から問題を捉え直し、「発展・統合」させ、多面的・多角的な視点から新たな問いを見いださせる。

6. オープン化

坪田(2006)は算数の授業について、「問題」「解き方」「答え」の多様性について考えることができると述べている。そしてそれぞれについて①問題いろいろ(オープンプロブレム)②解き方いろいろ(オープンアプローチ)③答えいろいろ(オープンエンド)としている。これらのイメージを図にまとめると以下ようになる。

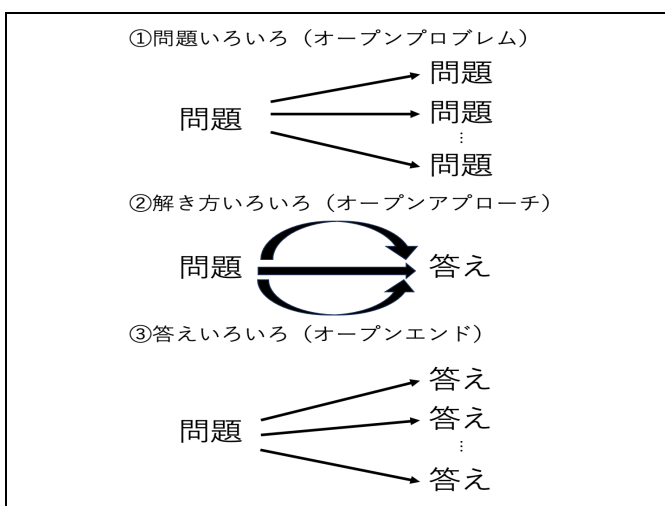


図11 オープン化のイメージ

①問題いろいろ(オープンプロブレム)は子どもが自分自身で問題をつくる「問題づくり」と同じ活動である。詳しくは「6.問題づくり」で後述する。

②解き方いろいろ(オープンアプローチ)は一つの問題に対していろいろな方法で解いていく指導法である。従来の一つの問題に対して一つの解き方を教える授業では、生徒は解法を知識として覚える態度になりがちになってしまい、試行錯誤しながら問題を解決していく力を育みにくくなってしまう。これに対して坪田(2006)は一つの問題に対して様々な解き方を試行錯誤しながら考え、それらを吟味しながら学ぶ授業の良さについて次の4点を挙げている。(坪田, p. 24)

- ①多様な方法に対してそれぞれのよさを価値づけることができる。
- ②いくつかの方法についてその優劣を考え序列化することができる。
- ③いくつかの方法を統合的に見直すことができる。
- ④いくつかの方法を構造化することができる。

以上のことより「解き方いろいろ」では様々な解き方を試行錯誤しながら考え、それらを吟味することで、生徒の見方を育むことが期待できる。

③答えいろいろ(オープンエンド)は答えや結果が多様に出せる問題のことである。島田(1995)はオープンエンドアプローチについて次のように定義づけをおこなった。

未完結な問題を課題として、そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展望し、その過程で、既習の知識・技能・考え方をいろいろな組み合わせで新しいことを発見していく経験を与えようとするやり方を意味するものとする(島田, 1995, p.9)。(波線については原著者による)

また島田(1995)はオープンエンドの問題を(I)関係や法則を見つける問題[How to find](II)分類の問題[How to classify](III)数値化する問題[How to measure]に分類することがで

きるとした。

坪田(2006)はオープンエンドのよさについて次の8点を挙げている。(坪田, 2006, p.28-29)

- ① 答えの多様性によって子どもの活躍する場面が増える。(活性化)
- ② 「よい」と評価される子どもが一層増える。(高評価)
- ③ 算数に対する柔軟な考え方が育つ。(柔軟性)
- ④ 試行錯誤しながら、独創的な考えを出す子どもが増える。(独創性)
- ⑤ 一つの問題に対して深く追求していく態度が育つ。(追究心)
- ⑥ 数学的な考え方や関心・態度にかかわる高次な目標に対する評価が可能になる。(高次目標)
- ⑦ 個に応じた指導として、発展的な学習や補充的な学習に応じられる。(個別指導)
- ⑧ 教師や子どもの算数観を変えられる。(算数観)

以上のことより「答えいろいろ」(オープンエンド)では生徒一人ひとりが自身の答えを持つことで、他の生徒にはない独自の考えを生み出すことにつながる。また答えが多様であるため、様々な視点から問題を捉えることができ、考えを深めることが期待できる。

7. 問題づくり

坪田(2012)は子どもが問題をつくるという活動の良さについて次の4つを挙げている。(坪田, p. 21)

- ① はじめの問題(原題)がよくわかる。
- ② 算数的活動が自然にできる。
- ③ 個に応じた活動となる。
- ④ 子ども同士の話し合いが活発になる。

また、中野他(1999)は問題づくりの授業の意義やねらいについて次の4つを挙げている。(中野他, p. 16)

- ① 子どもたち一人一人の主体的、意欲的な学習を促す
- ② 数学的な見方や考え方の育成を図る
- ③ 子どもたちの興味・関心や習熟の程度に応じた総合的な学習ができる
- ④ 子どもたちの探究的な学習活動を主とした問題解決的な学習ができる

また竹内・沢田(1984)は問題づくりをさせる場合につくり方の示唆を含まない発問をするのが原則であるとし、具体的な発問の仕方を次の図4のように示した。

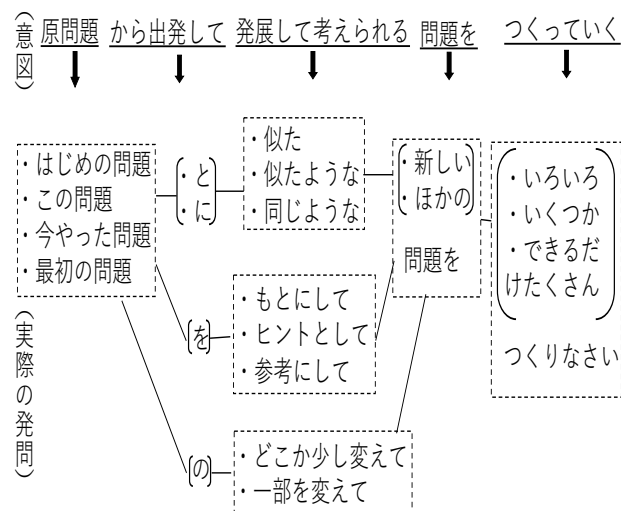


図12 発問のしかた(竹内・沢田, 1984, p. 33)

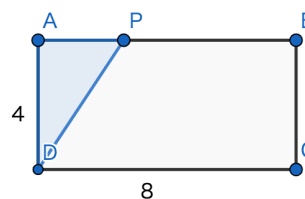
しかし、問題づくりの経験の少ない児童・生徒や、低学年の児童は問題が作れないことや、ただ数値を変えただけにとどまる生徒も予想される。そこで竹内・沢田(1984)は「どのような発問・手だてのもとに、どれだけ多様な、発展的な問題が作れたかを常に評価しながら児童・生徒の変容を把握すると同時に、『原問題の変更可能な部分に着目して問題をつくり変える』という問題づくりの手法を理解させることが大切なポイントとなってくる」(p. 34)と示した。

以上のことから問題づくりを通して原問題の深い理解に繋がり、数学的な見方・考え方を育むことができる。その際、全ての生徒が問題づくりを行うため、原問題の変更可能な部分や他の問題からつくった発展的な問題を例示し、問題づくりの手法を理解させることが大切である。

8. 授業の提案

本章ではオープンエンドな問題を第4章でおこなった問題設定に当てはめて考察をおこなっていく。

(問題)



上の図のような $AD=4\text{cm}$, $CD=8\text{cm}$ の長方形 $ABCD$ があります。点 P は、毎秒 2cm の速さで点 A から点 B まで移動する。点 P の移動とともなって変わる量をできるだけたくさんあげなさい。また点 P の移動とどのような関係がありますか。

図13 オープンな問題

(1) 問題(原問題)を解決する

予想される生徒の反応

- ・ 辺 AP の長さ
- ・ 辺 BP の長さ

- ・三角形APDの面積、周囲の長さ
- ・四角形ADCPの面積、周囲の長さ

点Pが移動する時間を x 秒とおき、求めたいものを y と置いて考えるとす。ただしいずれも x, y には変域がある。辺APの長さや三角形APDの面積は x (時間)に比例し、時間が経つにつれ増加することがわかる。一方、辺BPの長さや四角形ADCPの面積は一次関数で表すことができ、時間が経つにつれ減少していくことがわかる。三角形APDや四角形ADCPの周囲の長さは辺PDの長さを求める必要がある。辺PDは三平方の定理を使うことで求めることができ、三角形APDは時間が経つにつれ増加し、四角形ADCPは時間が経つにつれ減少していくことがわかる。

(2) 解決された原問題を発展的に考える

問題をもとに問いを発展させる新たな視点(What-If-Not)で考える。今回の問題で変更可能な点は次のものが考えられる。

- ・辺の長さ
- ・点Pの動く速さ
- ・長方形ABCD
- ・点Pの動く範囲
- ・動点の数

今回の問題で容易に変更できるものとして辺や点Pの動く速さが考えられる。しかしこれらは原問題の類題であり、数学的にはあまり発展していない。そのため生徒自身が「なぜ？」や「解きたい」と思えるような視点を共有する。

(3) 新たな問題をつくる

(2)で得られた視点をもとに生徒自身で新たな問題をつくる。以下は新たな問題の例である。

- ・点Pを点A→B→C→Dの順で移動させるとき、 x 秒後の△APDの面積を $y\text{cm}^2$ とする。この時の y を x の式で表しなさい。
- ・点Qは、点Pと同時に毎秒1cmの速さで点D→Cまで移動する。点P、Qが出発し、 x 秒後の△APQの面積を $y\text{cm}^2$ とする。この時の y を x の式で表しなさい。
- ・ $AC=10\text{cm}$, $BC=20\text{cm}$, $\angle C=90^\circ$ の直角三角形ABCがあります。点Pは、毎秒1cmの速さでCからAまで移動する。点Qは、点Pと同時に毎秒2cmの速さで点CからBまで移動する。点P、Qが出発し、 x 秒後の△PQCの面積を $y\text{cm}^2$ とします。この時の y を x の式で表し、またグラフをかきなさい。

(4) 新たな問題を解決する

点Pの動く範囲を拡張させる問題では点Pがいる位置によって式が変わり、辺DC上ではこれまでの比例から一次関数へと発展させることができる。動点を増やす問題では二次関数へと発展させることができる。

以上のことよりこの問題は条件や問題設定を変更させていくことで、中学校で学ぶ関数領域の内容(比例、一次関数、二次関数)を網羅することができる。また原問題がオープンエンドであるため、問題を自分ごととして捉えることができるため、新たな問いを見出すことにつながると考える。また原問題を発展的に捉え、解決することで、また新たな問いを見出すことにつながると考えられる。

9. まとめ

本稿では多くの生徒が新たな問いを見出すための方策について考察してきた。新たな問いを見出すための問題設定として、その問題を「解決すべき問題」として生徒自身が捉え、多様な視点から捉え、思考できるような問いを考えさせることが大切である。これらを働かせるためにはオープンエンドな問題が有効であるとわかった。また生徒が「What-If-Not?」の視点で問題を捉え、問題を発展させることで新たな問いを見出すことができるとわかった。そのためには問題づくりを行う際に変更可能な部分の例示や、「What-If-Not?」を用いて生徒の見方や考え方を育む必要がある。

今後の課題は生徒たちが作った新たな問題を解決した後、解いて終わりではなく、そこから生徒自身で再び問題設定を行うための方略について検討を行うことである。また今回提案した事例では様々な視点から動点の移動によって変化したものを特殊化する活動で終わっている。そのため特殊化した式を分類する活動などを通して統合させる所まで行いたい。これらの新たな問題を解決した後の活動についても今後の課題とする。

主な参考文献

- 赤塚久俊(2023)問題解決の力を育てる授業に関する研究. 日本数学会第105回大会発表要旨集(青森大会), p.258.
- 片桐重男(2004). 数学的な考え方の具体化と指導—算数・数学科の真の学力向上を目指して—. 明治図書.
- 文部科学省(2018)中学校学習指導要領解説数学編. 日本文教出版.
- 中島健三(2015). 復刻版算数・数学教育と数学的な考え方—その進展のための考察—. 東洋館出版社.
- 中野洋二郎・坪田耕三・滝井章(1999). 小学校算数教科問題づくりの授業 子どもが問題をつくる. 東洋館出版.
- Polya, G.・柿内賢信(訳)(1954). いかにして問題をとくか. 丸善出版.
- S.I.ブラウン/M.I.ワルター(1990). 『いかにして問題をつくるか 問題設定の技術』(平林一榮監訳). 東洋館出版.
- 島田茂(1995). 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案. 東洋館出版.
- 相馬一彦(1983). 問題の解決過程を重視する指導. 日本数学教育学会誌, 65(9), 2-11.
- 相馬一彦・早勢裕明(2011). 算数科「問題解決の授業」に生きる「問題」集. 明治図書.
- 相馬一彦・谷地元直樹(2020). 「問題解決の授業」を日常化する！ 中学校数学科の授業改善. 明治図書.
- 竹内芳男・沢田利夫(1984). 問題から問題へ—問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善. 東洋館出版.
- 坪田耕三(2006)坪田式算数授業シリーズ③算数楽しくオープンエンド教育出版.
- 坪田耕三(2012)坪田式算数授業シリーズ④算数楽しく問題づくり. 教育出版.