

# 協働的な学びを促す数学指導に関する研究 —オープンエンドな問題を用いた事例の検討—

自然科学系教育サブプログラム(算数・数学)

久保 直希

【指導教員】 二宮 裕之 飛田 明彦 西澤 由輔

【キーワード】 高等学校 協働 オープンエンド 知の創造

## 1. はじめに

これからの時代は答えがないのが当たり前になってくる。生徒は其中で既習の事柄を用いて考えていく必要がある。そこで、私は数学の授業でも答えが一意に定まらない、又は、導く過程が複数考えられるような問題を扱うことが重要になると考える。そして、それらの問題を通して、生徒が他者と協力して問題を考えるような授業を作っていく必要があると考える。つまり、協働的な学びを促していく。学びは他者と関わることで、自分にはない視点や考えに触れることができ、深まることにつながる。

現在、主体的・対話的で深い学びとなるような授業改善が大切だと学習指導要領で述べられている。その中で、令和の日本型学校教育では、個別最適な学びと協働的な学びの一体化が課題になるとされている。よって、協働的な学びを考えると個別最適な学びも考える必要がある。

本稿では、個別最適な学びと協働的な学びの関係を踏まえ、オープンエンド化の結びつきを考察していく。最終的には、オープンエンド化を通じた授業作りを提案する。更に、オープンエンド化によって複数の考えが出ることを利用して、それらを統合して、子どもがさらに発展的に考える際に生徒の協働的な学びを促すことに繋げていくための方策をオープンエンドな問題をもとに検討することが目的である。

## 2. 協働的な学びと個別最適な学びについて

### (1) 協働的な学びについて

令和の日本型学校教育では協働的な学びについて、子ども一人一人の良い点を生かし、異なる考えが組み合わさり、より良い学びを生みだして行くようにすることが大切だと述べている。

また、江森(2010)は「送り手の送信したメッセージが受け手の思考を刺激して、受け手の所有している知識などと結びつくことにより新しいアイデアが創造される」(P. 80)と述べている。

また、島田(2022)は数学的活動には発散的思考と収束的思考があり、創造の過程は発散と収束の両方が合わさって、1点に向かうと述べている。

したがって、グループワークやペアワークなどをしても、そこに自分の意見や考えを持たずに他者と関わると協働的な学びにはならないと考えられる。また、収束のみ、発散の

みでは創造はされない、つまり、学びが深まらないため、解答が出てから発展させることを考える必要がある。中山(2016)は協働的な学びは創造的な問題解決の育成にも効果があると述べている。従って、協働的な学びは自分の知識を発展・創りあげるときに促されると考えられる。

自分の意見を持たせるときに、数学が苦手な子どもは「自分の意見や考えが他と違っていたらどうしよう」、「間違っていたらどうしよう」と考えてしまうことが多い。しかし、間違った考えなどは、他人と違うことで学びが進み、他者と関わるきっかけにもなるため、授業は間違う場所であると教師は指導していく必要がある。有田(1989)は教師がわざと間違えてみせることで、子どもたちも安心して、間違った考えを堂々と発言したり、書いたりするようになると述べている。

数学の問題に対して一人で取り組む事が多いが、それも自由に周りと話しが出来るように教師から促す必要がある。加固(2022)はまわりの人たちだけでまずは話を聞いたり、考えたりするが、最終的にはだれとでも協力して問題を解決することがポイントだと述べている。

### (2) 個別最適な学びについて

令和の日本型学校教育では個別最適な学びについて、「指導の個別化」と「学習の個性化」の2つの視点があると述べている。

中教審で「指導の個別化」は一人一人の特性や学習進度・到達度に応じて、指導方法・教材などの柔軟な提供・設定を行うこと。「学習の個性化」は一人一人に応じた活動や課題を提供して、学びが最適となるよう調整することと述べられている。そのため、教師から常に問題を与えるのではなく、子供たちが学びたい、追求したいと思える授業にしていることが大切になると考えられる。

### (3) 協働的な学びと個別最適な学びの関係

加固(2022)は個別最適な学びは協働的な学びに支えられてはじめて成立するものと述べている。二宮(2022)は個別最適な学びで習得された各自の学びを協働的な学びでさらに深める。そこでの学びの成果を各自の学びにフィードバックし個別最適な学びを更に深めることが出来る。そのため、協働的な学びを有効に進める要件として個別最適な学びがあるとし、また、協働的な学びの充実がその後の個別最適な学びを有効に進めるための要件であると述べている。また、小野(2022)は以下の図のように示している。

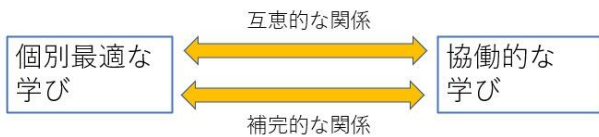


図1 関係図(小野, 2022, p.8)

協働的な学びを促すことを考えるときは個別最適な学びの充実も同時に考える必要があるとわかる。さらに、協働的な学びの前後には個別最適な学びが必ず位置付くとわかる。協働的な学びは多様な意見に触れる発散の過程で、個別最適な学びは知を創り上げる収束の過程であるといえる。もしくは、協働的な学びでも自分とは違う視点の考え方があるが自分と同じところに着地した場合は収束の過程であるといえる。

協働的な学びは個別最適な学びと相互関係にあり、知の創造に向けては収束と発散の過程が必要であるとわかった。

### 3. オープン化について

オープン化の種類として、坪田(2003)は問題・解き方・答えから考えたとき①解き方いろいろ②問題いろいろ③答えいろいろ、があると述べている。まとめると以下のように図示できる。

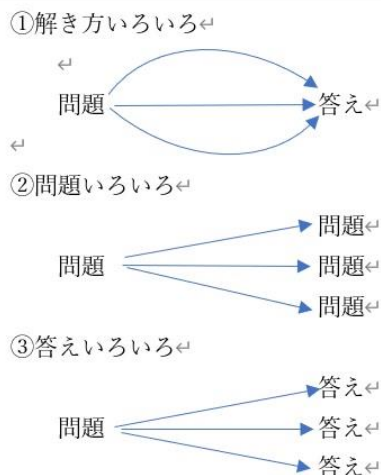


図2 3つのオープン化

オープン化はいろいろな意見を出さきっかけにもなり得るため、授業でしていきたい。自分の答えを作り出すためにクローズされた問いでは、解が決まっているため、自分の答えにはならない。従って、自分で既存の知識を活用して、自分だけの答えや方針を決めるために、オープンエンド化する事が必要だと考える。

また、生徒が学ぶ意欲や、学ぶ意義について教師から一方的に伝えるのではなく、生徒自身に考えさせる必要がある。そのためにも、生徒に達成感を与えるクローズされた問題ではなく、次の学びにつながるように、生徒が疑問や興味を持って終わる、オープンな問題が大切だと考える、したがって、本稿では③に焦点を当てて考察をしていく。

池田(1996)はオープン・クローズドな活動について、オープンな活動は目的または、方向性が定まっていない探求な

活動、クローズドな活動は目的と方向性が定まった分析的な活動と述べている。

表1 オープン・クローズドの3つの解釈  
(池田, 1996, p.243)

	オープン	クローズド
解釈1	多様性あり	多様性なし
解釈2	発展	統合
解釈3	目的・方向性なし	目的・方向性あり

ここで、「見つける」という活動に着目すると、オープンな活動にもクローズドな活動の両方になり得ると考えられる。なぜなら、数字が並んでいる問題や多くのグラフから関係性を探す問題を与えられたのであれば、決まったものを見つける訳ではない。そのため、子どもが自由に色々なことを見つけて、オープンな活動になる。一方で、数学でよくある間違いはどこだろうと言う活動であれば、間違いを見つけてという明確な目的があり、生徒は活動の方向性が定まった状態であるため、クローズドな活動である。このように、「見つける」はどちらにもなり得るとわかる。池田(1996)はオープンな活動と数学的な価値・考え方との関係を以下のように示している。

オープンな活動	数学的な価値・考え方
見つける	関係、性質、変数・定数等の発見
分ける	統合、抽象化、集合の考え
表わす	数量化、図形化、記号化
広げる	発展、一般化、拡張の考え
整える	条件の明確化、最適化、構造化、ルール化
つくる	具体化、日常場面への応用、作問
読みとる	日常場面への解釈
組み合わせ	数・量・図形の合成・分解
方法を考える	作図

図3 オープンな活動と数学的な価値・考え方との関係  
(池田, 1996, p.244)

さらに数学的概念の形成過程をオープンな活動とクローズドな活動に照らして池田(1996)は以下のように示している。

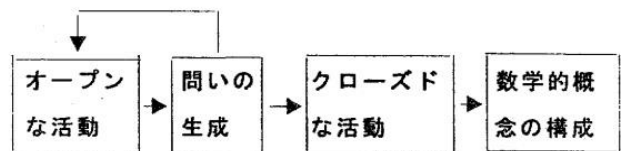


図4 数学的概念の構成過程(池田, 1996, p.244)

オープンな活動は問いの生成に繋がると図から分かる。島田(2022)は未完結な問題を扱って授業を構成するオープンエンドアプローチについて、既習の知識・技能・考え方を組み合わせ新しいことを発見していく経験を与えようと

するやり方と述べている。オープンな活動は既習の事項を組み合わせ、知識の創造に繋がるとわかる。

#### 4. オープンエンド化について

オープンエンドについて、形式的には授業の終末を開くことが重要ではない。子どもの学習意欲や知識が持続発展し、成長することが重要である。子どもが考え続け、問い続けられるようになることこそがオープンエンド化の目的(片上, 2003)と述べられている。数学の授業において、答えや考えが色々でて来ることは、授業を活性化させ、子供たちの学習意欲が持続することに繋がると思われる。しかし、「色々な答えが出た」で終わってしまうと、その授業での学びが深まらない。色々な考えに触れて、その先に何が考えられるか、新しくどのようなことが言えるか、等も考えることが重要になる。

オープンエンドは(I)きまり、関係を見つける問題(II)分類の問題(III)数値化の問題に分類できる(島田, 2022)。

(I), (II)は数学の苦手な生徒でも、見つけやすく、自分の考えを、少なくとも1つは持てると考える。しかし、単なるオープンな問題で数学的な高まりがなくなる可能性がある(島田, 2022)。そのため、法則などを見つけた、その先どうするかを考える必要がある。(III)は数学的なものを多分に含まれているため、オープンエンドな問題として有効であった(島田, 2022)。しかし、数値化の問題はオープンになりすぎている危険性があるため、制約条件を考えてオープンにする必要がある(島田, 2022)と述べている。これらの3つのオープンな問題は子どもの実態や単元のどの場所で扱うかを考慮して、授業に組み込むことで効率的にオープンエンド化出来ると考える。

文部科学省が算数・数学の学習過程を図5のように示している。

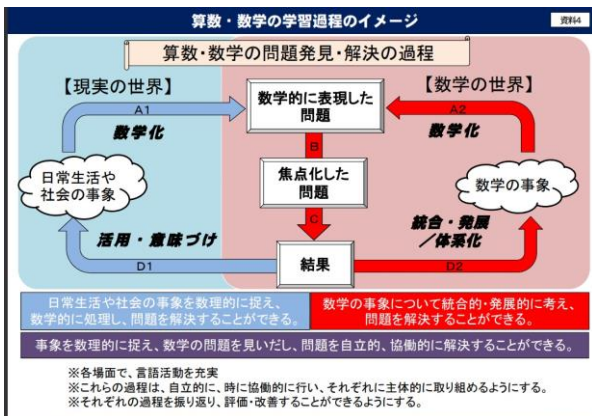


図5 算数・数学の学習過程のイメージ  
(文部科学省, 2016, P. 2)

図5から、結果が出てからもう一度問題を作り、また、結果を出すという流れになっていることがわかる。エンドがオープンになっていることから、オープンエンド化した授業は解決が各々異なり、考えを深めるために課題を明確にして、自分で数学的に表現した問題を作り、解決する流れになる。つまり、図5のような学習過程をオープンエン

ド化した授業では作り出すことが可能であるとわかる。また、オープンエンドは学習者全員が同じエンドにならないため、算数数学の学習過程における「結果」が出たあと、「日常生活や社会の事象」、「数学の事象」のどちらかに行くかもわからない。そのため、生徒の主体性が生まれる。

オープンな問題は数学的に深まらない可能性もある。それは、図5での結果が出て終わりと同じことだと考える。そのため、ぐるぐると回る、数学的に深めることが出来る問題がオープンエンドな授業では求められることがわかる。しかし、オープンな問いから見つかる、規則、法則、発見をすべて数学的価値が高いものにするのは難しい。そのため、教師は数学的価値が高い生徒の考えを拡散することで、見つけられていない・考えられていない生徒に着目させやすくする必要がある。特に高校では数学の事象に回ることが多いと考えられるため、拡張化や一般化することがオープンエンドな授業では求めていきたい。

#### 5. 協働的な学びとオープンエンド化の関わり

上記までに協働的な学びとオープンエンド化について述べてきた。オープンエンド化は答えが1つに定まらない問題にする事で、一人一人に考えを持たせることができ、子ども自らが学習意欲を持ち、次の学びに繋がる。協働的な学びは他者と異なる考えが生じることで、学びが深まる。

協働的な学びを促すときに重要なことは以下のことだと考える。

- ・多様な他者と関わる。
- ・自分の考えを持ち、思考プロセスを表現する。
- ・他者とのズレを認識し、考えを衝突させる。
- ・自分の考えを修正・発展させる。
- ・考えを修正し新たな問いを立てる。
- ・問いを解決をする。
- ・個人での活動を入れ、思考の整理をする。

また、数学は答えが1つに決まっている。そして、その答えを見つけるだけ、という数学の学習観も変化する。数学は答えを導くことが最も重要な事ではないと考える。何を利用して解決したのか、他の考えはないのか、を考えることが重要である。そのため、オープンエンド化を通じた授業をすることで、問題を解決する事が目的にはならず、問題を様々な視点から見ることになる。そして、既存の知識をより多く利用しようとして、自分の学びが深まることに繋がると考える。したがって、数学の授業でオープンエンド化は有効であると考えられる。オープンな活動は問いの生成に繋がると図4から分かる。

島田(2022)は未完結な問題を扱って授業を構成するオープンエンドアプローチについて、既習の知識・技能・考え方を組み合わせ新しいことを発見していく経験を与えようとするやり方と述べている。新しいことを発見するために知識を組み合わせるとあり、これは自分の既習の知識を組み合わせということだけではなく、他者の知識と自分の知識

を組み合わせるといふことも含むと考えられる。

オープンエンド化によって様々な考えがでてくるが、それを子どもたち一人一人が自分で整理して、新しいことは何かを考えられるようにするために、他者との関わりが重要になる。そのためには、整理するための個での学びも関わっている。集団と個の往復で学びが深まり発展的に考えることになる。したがって、発展的に考えるきっかけがオープンエンド化であると考えられる。

協働的な学びは結果が出てから促すことが大切だと考える。オープンエンドにすることで、はじめは図5の結果までは全員が行き着くと考えられるからである。算数数学の学習過程における「結果」の後、共通の考えをもつ生徒同士などが協働して、発展させることが想定できるため、教師は協働できるように生徒の考えを拡散させることが必要である。

## 6. 授業改善について

正解がわかった子どもからわからない子どもに教える、教え合いについては正解が定まっているため、それ以上の深い学びは起きにくい(水野, 2016)と述べられている。子どもたちは正解を探すことに必死になり、わかったら満足してしまうため、その先どうなるか発展的に考える深い学びにならないと考える。また、わからない生徒がわかる生徒に教えてもらうという行為は、他者と関わるという観点では有意義ではある。しかし、自分の考えを持っていない生徒は、ただ、話を聞いてわかった気になり、学びにならないこともあると考える。そのため教え合いをするときも自分の考えをしっかりと持つ、又は、話を聞いているときに内容について自分の言葉で整理して理解することが重要になる。

新しい知を創造するために他者との対話で自ら問いを作ることが重要である。石黒(2021)は対話を通すことでズレを修正し、共通理解し、新しい理解や何かを作り出すことができる」と述べている。

数学的活動のオープンエンド化について本稿では以下のように考えている。

オープンエンドな問題を用いて、子どもの思考が発散する過程と収束する過程の両方が存在する活動。また、自ら問いを立てて他者と協働し、知の創造に向けて数学的に探求する活動。

数学的活動のオープンエンド化は以下の図をイメージする。

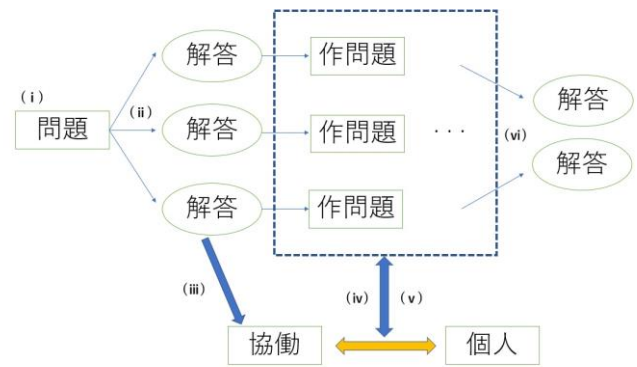


図6 数学的活動のオープンエンド化

数学的活動の過程を以下のように提案する。

- (i) オープンな問題を与える。(元問題)
- (ii) 生徒一人ひとりが考えを持つ。(個別最適な学び)
- (iii) 他の人と考えを共有する。(協働的な学び)
- (iv) 自分の問いを立てる。(個別最適な学び)
- (v) 問いに対して解答を作る。(個別最適な学びと協働的な学び)
- (vi) 自分の言葉でまとめる。(個別最適な学び)

協働的な学びはオープンエンドな問題を用いることで個人の考えを持たせることに繋がり、多様な考えがクラスに生まれる。((i), (ii)の過程)。(iii)で考えを持った状態で他者との対話を促すことで多様な考えに触れることになる。その際に、他者に自分の思考プロセスを表現することが求められ、また、話を聞いて自分になかった考えや問題の見方を知り他者とのズレを認識する。個人の活動で思考を整理する。そして、(iv)で問題を作り(作問題)、解決をする。(v)で解決したことをまた、他者と協働をし、他の人の見方や思考の流れを知る活動をする。その後、(iv)と(v)を繰り返すことにより自分の学びを深めていく。その過程で考えが組み合わさっていき(vi)の活動で収束に向かう。

オープンな状態で終わるが、数学的な表現または、新たな数学的事象に興味を持てるように終わることで、数学は解答が出て終わりではないということを生徒が感じることができるため、高校数学でも実践することが大切だと考える。元問題から発散する過程と最後はいくつかのまとまりができるように収束する過程、この2つの過程を含む数学的活動のオープンエンド化である。

図5のような学習活動をするためにもオープンエンド化は有効であると考えられる。具体的に、次節でオープンエンドな問題の事例を考察していく。

## 7. 事例について

(例1)

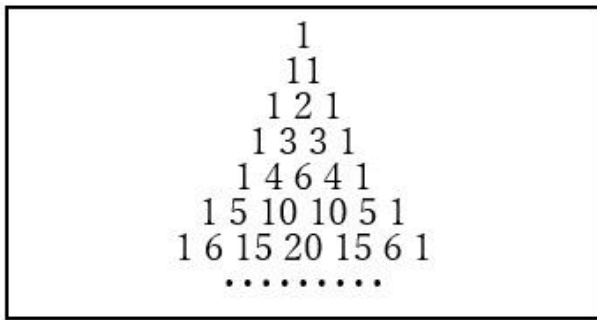


図7 パスカルの三角形

上記のパスカルの三角形から気づいたことを生徒にあげさせるオープンな問題を考える。予想される生徒の反応は次が挙げられる。

- ・端がすべて1である
- ・左右対象になっている
- ・斜め上の数字の和が間の数字になっている
- ・階差数列がある

以下、授業の展開例である。

- 生徒に個人で出来るかぎり挙げさせる
- 上がったことをグループで共有する
- 自分で意見を整理する
- 性質・法則を数学的に式や言葉にして表す
- まとめ

ここでは、上記の(ii)~(iv)はループして行うことが重要になる。これらの過程は個と集団の行き来に当たる。このループをすると、生徒一人一人異なる見方をして、自分の考えている数学的事象を説明しようとするため、クラスが同じ方向には向かわずにオープンな状態になる。始めは、視覚的にわかる性質や法則を挙げるだけなので全員が意見や考えを持つことになる。しかし、数学的に式や言葉で表すのは、一人では出来ない事が予想されるため、自然と生徒は他者と関わろうとする。それは、自分の考えを持ち関わるため、協働的な学びであるといえる。見つけたものを共有するだけでは、学びにならないので、数式化・なぜ言えるのか等を考えさせることが重要である。

教師が全体で共有する場面を作ることは必ずしも必要ではないと考える。重要なのは、発展的に考えることなので生徒自身が、クラスを歩き、他の人と触れるようにすれば全体の共有時間を作る必要もない。

教師は子どもの考えや意見を整理しながら、「今、何が課題となっているのか」、「どんなことを考えているのか」を確認し、明確にする(石浜, 2019)。また、グループによって同じ視点で考えていることがあれば、それを教師は全体に共有して、グループ同士の対話を促すことが重要になる。

この問題は発散することを容易に起こすことができる。発散の内容としては、数字の並びに着目する(横・斜め)、何の数字なのかに着目する、立式してみる等、色々な見方

が出る問題の代表例である。

オープンな問題となるため生徒は主体的に色々な法則を見つけようと活動をすると考えられる。しかし、授業では数学的な深まりが大事である。「色々発見できた」で終わると数学的な深まりがない。能田(1983)は数学的に開かれている活動とは「数学的価値のある活動が保証されていることであり、学力や興味により進められる自由度」。子どもに開かれているとは「学力、興味により進められる自由度」があることと述べている。ここでは、この問題では数字に着目をし、規則を発見したら、その後は数学的に表現することが求められる。

(iv)では「組み合わせの考え」、「二項定理の考え」、「数列の考え」などいくつか収束する事ができると予想される。

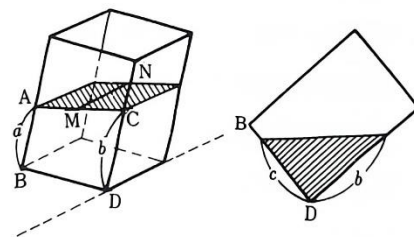
(例2)

プラスチック(透明体)でできた直方体の容器に、水が途中まで入っています。この容器を、底面の一边を固定して傾けると、傾きに応じて、水面で限られたいろいろな部分の形や大きさが変わってきます。それらの形や大きさの間にある、いろいろな決まりをできるだけたくさん見つけなさい。(見つけたことは箇条書きにしてください。)(島田, 2022, p22)

この問題は小・中・高の段階に応じて数学的活動の深さを変えられる。高等学校では、直方体の容器を底辺を支点に傾けたり、角を支点として傾けたりなど発展性がある。

島田(2022)では以下のことが考えらると挙げている。(p.22)。

- 第1図のように、底面に垂直な辺の水面下にある部分の長さを、それぞれ $a$ と $b$ とすると、 $a + b$ は一定
- 第1図のACの中点Mは定点で、ACの中点NとMを結ぶ線分MNは定線分である。
- 第2図のようになるまで傾けた場合は、 $bc$ は一定となる



第1図

第2図

この問題は、辺に着目する、点に着目する、表面積に着目する、体積に着目する、変化するところしないところに着目する、など多くの着目する点があるのが特徴だと考える。

この問題は直方体の容器を用いての問題となっている。しかし、容器の形を自由にして生徒に考察をさせると、より多くの考えが出て、議論が活発になると考えられる。容器の形を自由にさせることで、自分の考えた思考プロセスを他者にしっかりと伝える必要があるため、数学的表現の向上にも繋がる協働的な学びである。教師はそれぞれの考えた

容器を黒板に書くことで、生徒は気になった形を見つけ、対話をしに行くことになると考える。そこで、協働が生まれる。それを基に個人の作業に戻り、自分でその形について考察をすることで個別最適な学びとなる。

(例3)

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

図8 三角比の表

上記の表から気づいたことを生徒にあげさせるオープンな問題。考えられる生徒の反応として次が挙げられる。

- $\sin \frac{\pi}{4}$  と  $\sin \frac{3\pi}{4}$  が同じ値。
- $\cos \frac{\pi}{6}$  と  $\cos \frac{5\pi}{6}$  が正負が反対。
- $\sin \frac{5\pi}{6}$  と  $\cos \frac{\pi}{3}$  が同じ値。
- $\tan \frac{\pi}{6}$  と  $\tan \frac{\pi}{3}$  の値が逆数になっている。

など、値の関係性に着目できることが考えられる。これは、個人で行なうことができる作業であると考えられる。その後、周りの人と協働することで、一般的なことを表すことにつながると考える。

- $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$

など生徒たちで数学的に表現することが可能である。着目した関係性により、最終的な一般化の式が異なるため、オープンエンドな問題となっている。また、表から式を立てることを紹介しているが、生徒の中には半円などの図を用いて視覚的にわかりやすくする生徒も出てくるのが想定できる。この問題は、数学の不得意に限らず関係性を見つけることが出来る問題となる。

教師の関わりとして中山・川崎(2016)は児童の主体的・協働的な学びを生み出すためには児童の良い言動を意図的に拾い上げ全体へと拡散することが重要であると述べている。したがって、教師はグループ等を意図的に組むのではなく、グループやペアが出来るように、生徒の考えを拾い上げて全体で共有できるようにすることが大切な役割であるとわかる。この問題であれば、数字だけではなく、半円などの図にして書くことで一般化しやすくなる。そのため、半円を書いている生徒がいれば、拡散することが大切である。また、三角比の段階で半円など図との関わ

りをしっかりと理解できていけば、三角関数でも自然と半円を単位円に拡張する考えになるのではないかと考える。三角比の表から性質を見いだす活動をし、一般化するオープンエンドな問題として検討した。しかし、三角関数の性質を見つける活動のときもこれは有効に働くと考えられる。三角関数の単元で行なうことで、三角比の見方を利用して、発展的に考えることが出来る。

(例4)

0 <sup>2</sup>	1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	7 <sup>2</sup>
1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	7 <sup>2</sup>	11 <sup>2</sup>	16 <sup>2</sup>	22 <sup>2</sup>	29 <sup>2</sup>
1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	8 <sup>2</sup>	15 <sup>2</sup>	26 <sup>2</sup>	42 <sup>2</sup>	64 <sup>2</sup>

図9 規則性の問題

数学教師のための問題集(島田, 2021)に記載されている、「12個の平面は空間を最大限いくつの部分に分けるか」(p.72)の改題である。

図9を見てわかることをできるだけ挙げさせる問題。考えられる生徒の反応として以下のことが挙げられる。

- 1段目が0と正の整数になっている。
- 2段目が階差数列になっている。
- 2段目の数字はその数字の左と上の数字の和に等しい。
- 2段目の数字はその数字の右と上の数字の差に等しい。
- 3段目の隣同士の数字の差の数字の並びは2段目の数字の並びと同じ。
- 3段目の数字はその数字の左と左上の数字の和に等しい。
- 3段目の数字はその数字の右と上の数字の差に等しい。
- 2行目と3行目の数字が3列目まで等しい数の並びである。

などの反応が考えられる。この中には数学的に深まらないものがある。しかし、全員が見つかる、数学的な規則や法則を挙げる事が出来れば苦手な生徒には十分な活動であると考えられる。これらを個人で見つけると、数列として考える生徒が出てくる。この先が一人で表せない生徒が多く、また、異なる数学的表現に向かう段階になる。つまり、オープンな状態で授業が進み、数学的に表現するために、周りや自然と協働することになる。

- 1段目をnの数列とみて2段目をf(n)とする

$$f(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

- 3段目をg(n)とすると

$$g(n+1) = f(n) + g(n)$$

- $g(n) = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$

などの一般化が可能である。このように表されると、違う表現をした生徒同士で考えを共有し、理解が深まると考えられる。さらに、この問題は、具体的な問題を考えさせ

ることも可能である。

・増えていく法則から、2 段目は平面を直線で区切ったときの最大いくつに分けられるか。

上記の考えが生徒からであれば、3 段目も 2 段目と関係があることから、空間に拡張したときの問題となり、

・3 段目は空間を平面を用いて区切ったときの最大の問題

とできる。このオープンエンドな問題は、数学的に表現でき、かつ、数字が増えていく法則から、問題を作るところまでに収束することが可能である。この問題では、教師は何の数字の並びかを生徒に考えさせることも大切であると考える。なぜなら、数列として、式にすることはある生徒によっては容易であるため、具体的にどのような場面が数学的に表現された問題かを考えさせることで、単純に式にして終わりにはならず発展させることが可能であるからである。また、2 段目と 3 段目の関わりも考察させたい。2 段目は平面、3 段目は空間の話で空間でも平面の考えを活用できる。数列ができる意味が理解できるため、式が求まった生徒にはそこまで考えさせたい。

数字の表から増加率を求める生徒も中にもいるかもしれない、また、データをプロットし関数で近似する生徒もいるかもしれない。このように生徒は自分たちで協働しながら進められ、既存の知識を生かした学びが出来ると考える。

(例 5)

① $y = x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x + 4$	② $y = x^4 - 2x^2 + 1$
③ $y = x^3 - x^2 + x - 1$	④ $y = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$
⑤ $z = x^2 - y^2$	⑥ $z = 2x + 3y + 3$
⑦ $z = x^2 + 2xy + y^2$	⑧ $y = x^6 + 2x^3 + 1$

図 10 色々な関数

上記の色々な関数を見て、どのようなグループに分けられるか、共通点はあるかをできる限り挙げさせる問題。考えられる生徒の反応として以下のことが挙げられる。

- ・6 次関数、4 次関数、3 次関数、2 次関数、1 次関数に分けられる。
- ・因数分解出来るものできないものに分けられる。
- ・因数分解したときの因数の個数での分類。
- ・1 変数の関数か 2 変数での関数かでの分類。
- ・グラフを書いたときの極限の数での分類。
- ・最高次数の前の係数が 1 かそれ以外かに分けられる。
- ・グラフが x 軸に接しているかの分類。
- ・②と⑧のグラフが(-1,0)で極地を持つ

などが考えられる。ここでは、関数のグラフを実際に書いて気づく性質もあれば、式変形して気づく、変形前から気づくなど多くのグループが存在する。従って、生徒が自分たちで既存の知識を活用しグループが作られる問題となっている。グループ分けをしたのをもとに他者と関わることを考えられる。各自で考えを持っているため、協働的な学びとなる。人によってはたくさんのグループに分けられると思うが、考えを他者に説明することで学びが深まる。ま

た、他者と考えを共有したことにより、他者とのズレや共通理解が出来るため、新たな自分の問として構成できる。協働後の考えられる反応として以下のことが挙げられる。

- ・2 変数のグラフはどう書くのか
- ・極値は何か
- ・3 変数はあるのか
- ・2 変数の関数も微分は出来るのか

などが考えられる。2 変数に着目して発展することをこの問題では考えている。そのため、数Ⅲの微分積分を習得済みであることが望ましい。

2 変数のグラフはノートに書くのは厳しいため、タブレットや ICT を利用することで生徒は着ししやすい。高校では ICT の利用がなされない授業が多く存在していると思うが、ICT を用いることで理解が進む教材もあるため、この問題では積極的に ICT を利用したい。また、2 変数の微分は偏微分を用いるため、大学の内容である。そのため、生徒の大学での学習をイメージする問題となっているため授業で取り入れると面白いと考える。

偏微分をしなくても、グラフの予想は立てることが可能である。これのときに、予想を立てたら、他の人と予想を話し合うことで、協働になる。したがって、この問題は発展ができ、協働を促すことにつながっていると考える。

教師は、できるだけ多くのグループに分けさせる声がけをする。その際に理由も含めて考えさせておく。生徒が協働しているときは、生徒の発言や考えを拡散することや収束するために、何を問題として解いているのかを明らかにして、生徒が迷わないようにすることが大切である。

## 8. 生徒の協働的な学びを促すための方策についての考察

(例 1)、(例 3)～(例 4)は数字の表からそれぞれの関係性を見つかる問題となっている。(例 5)はグループ化をする問題となっている。どの例も様々な見方ができ、考えを持つ問題となっている。また、考えを持ってから、発展できる問題になっている。発展させるときに着目している内容によって発展させる内容が異なるため、他者に説明する、他者とのズレを生み出すことができる。そして、最終的には同じような場所に収束するため、お互いが共通理解を図るために、協働することにつながると考える。協働的な学びを促すためには、発展性を持たせること、他者と関わることで多方向に進める問題である必要がある。(例 1)、(例 3)～(例 4)の問題では、規則や数字の特徴を見つけるのは容易になっている。しかし、着目場所によって進む方向が異なるため、オープンな問いになっている。その後、数学的に表現するために、既知のことを用いて思考をする。そのときに協働が生まれる。同じところに着目した者は対話ができ、異なるところに着目していても、ズレを認識するために着眼点について理由を話し合うことができる。教師の役割は、数学的価値の高い内容、発展性が生まれる内容を見つけクラス全体に拡散することである。また、生徒が結

果を発展させるための問いは何かを明らかにすることである。(例5)は既知の内容を活用、理解している必要がある。因数分解や微分などを習得していることで、多くのグループ化が可能であり、発展もしやすくなっている。この問題はグループ化したときの理由までを個人の段階で考えさせることも大切である。それをもとに、次の協働に入ることで、より深く他者に伝えられ、共通理解が図れる。

これらのことからオープンエンドな問題は授業がオープンな状態で進む。そして、授業がオープンエンド化され生徒が自然と他者と関わり協働が生み出されることがわかる。

## 9. おわりに

協働的な学びは他者との関わりだけでは不十分であり、考えを持ち、変化して新しい知識となることが重要であることがわかった。数学の授業でみられる、答えが1つに定まる問題では、子どもの自由性が失われ、他者とただ教え合うだけに止まる可能性がある。オープンエンド化を利用することで子どもが様々な考えに触れ、発展させるために他者と関わろうとする。子どもはこの先に考えられることは何かなど、問いを自ら立てて他者と関わりながら進む。したがって、協働的な学びと個別最適な学びが一体となって授業が進むことになる。

授業を作るときは数学としての知識を深めるために、他人の意見を聞いて整理するだけでは深まりとしては浅いと考える。そのため、性質や法則を数学的に式や言葉にして表すことをさせる。ただし、表すに至る過程や最終的に表したい数式などは一人一人違うため、オープンエンドな状態の活動といえる。オープンエンド化を通した授業をするために、子どもの実態や単元に合わせて様々な意見が出るように問題を作る。更に、その先子どもだけで、数式化すること、疑問が持てて考えることが出来る問題にすることが大切である。

授業で大切なのは、子どもが各々発展的に考えられるようにすることである。発展的に考える際に、子どもは他者と関わりをもって深めるため、自然と協働的な学びになると考えられる。オープンエンド化は協働的な学びを促すきっかけになるため、オープンエンド化した授業を作ることが必要だと考える。

これからは教師が進路を決めて行なう授業だけでは、子どもの主体性がなくなるため、子ども同士の学び、つまり協働的な学びとなる授業もしていくことが重要である。したがって、本研究で述べた、オープンエンド化を通した授業をすることで、子どもたちの協働的な学びを促すことに繋がり、子どもが主体的に授業に参加できると考える。

オープンエンドな問題は生徒自身によって発展はしやすい問題となりうることから、生徒同士の対話が増える。このことから協働的な学びを促すために有効であると考えられる。今回は5つの事例をもとに発展性などを検討したが、他の単元でもオープンエンドな問題をつくることは可能であ

る。オープンエンドな問題では数学的に価値が低い見方も出てくる。しかし、教師が数学的価値の高い見方を拡散することで、発見できていない生徒も着目できるため教師はすべてを生徒に任せるのではなくコントロールも必要である。水野(2016)は多様な意見を無条件に認めたら、無政府状態を招かれないと述べている。そのため、発見できたことを無視はしないが、違う視点を持たせるように教師の声かけが重要になる。

今後は教材開発を進め、オープンエンド化を通した授業をつくり、実践をして課題や成果を考察していきたい。

## 主な引用参考文献

- 有田和正. (1989). 「追求の鬼」を育てる. 明治図書.
- 江森英世 (2010). 「数学的コミュニケーションの創発連鎖における反省的思考と反照的思考」『科学教育研究』Vol.34, No.2, pp.71-85
- 池田敏和(1996). オープン・クローズドな活動による数学的概念の構成. 数学教育論文発表会論文集 29, pp241-246.
- 石黒康夫.(2021). 2 「問いを創る授業」が育む力. 鹿嶋真弓・石黒康夫・吉本恭子, 子どもの言葉で問いを創る授業 (pp. 16-23). 学事出版株式会社.
- 石浜健吾. (2019). 共同思考から協働思考へ子どもの学び方を変えよう-. 新しい算数研究, 581(6), 16-17.
- 加固希支男.(2022). 「個別最適な学び」を実現する算数授業のつくり方. 明治図書出版株式会社.
- 片上宗二. (2003). 協働と挑戦による新しい知の創造. 日本教育方法学会編. 新しい学びと知の創造(pp.68-84). 図書文化.
- 文部科学省. (2016). 算数・数学の学習プロセス (案). [資料7-3 算数・数学の学習プロセス \(案\) \(mext.go.jp\)](#)
- 水野正朗. (2016). 2 授業改革とアクティブ・ラーニング(高等学校). 日本教育方法学会編. アクティブ・ラーニングの教育方法的検討(pp.142-154). 図書文化
- 中山貴司・川崎弘作(2016), 主体的・協働的な学びを生み出す理科学習指導法の工夫～第3学年「磁石の性質」において [ja\(jst.go.jp\)](#)
- 二宮裕之・小野健太郎・新算数教育研究会(編集)(2022). 新しい算数研究 10月号算数の「個別最適な学び」「協働的な学び」の互恵的・補完的關係, 東洋館出版社.
- 能田伸彦(1983). 算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究-授業の構成と評価-. 東洋館出版.
- 島田茂. (2022). 算数・数学科のオープンエンドアプローチ. 東洋館出版社.
- 島田茂. (2021). 数学教師のための問題集 [教師のための問題集 改題]. 共立出版株式会社.
- 中央教育審議会. (2021). 「令和の日本型学校教育」の構築を目指して ～全ての子供たちの可能性を引き出す, 個別最適な学びと, 協働的な学びの実現～ (答申). [「令和の日本型学校教育」の構築を目指して \(答申\) 【本文】 \(mext.go.jp\)](#)
- 坪田耕三. (2003). 算数楽しくオープンエンド. 教育出版株式会社.