関数電卓使用を前提とするモデリング授業の実践報告
－ピタゴラス音律と複利計算を題材として－

自然科学系教育サブプログラム（算数・数学）

棚澤　日菜子

【指導教員】　松嵜　昭雄　　飛田　明彦　　松原　和樹

【キーワード】　複利計算　　ピタゴラス音律　　関数電卓

1．はじめに

筆者は，現在，関数電卓（カシオ計算株式会社 fx-JP900-N）使用を前提とするモデリング授業の実践に向けて研究を進めている。具体的には，ピタゴラス音律を題材とした授業と複利計算を題材とした授業である。

ピタゴラス音律を題材とした授業について，筆者は，これまで，最も古い音律とされているピタゴラス音律に着目し，ピタゴラス音律の算定法を数学的に考察した（棚澤, 2021）。また，ピタゴラス音律の算定法をもとに，関数電卓使用を前提とする教材開発をおこなった（Tanazawa, 2021）。この教材は，ピタゴラスが音律を見つけた際に用いたとされる，モノコードをもとにしている。そこで，教具モノコード（図 1）を用いて，大学生を対象としたワークショップを実施した。そして，学生が表した弦の長さを求める関数を，3 つのタイプに分類・整理し（棚澤・松嵜, 2022），コンピュータモデルを付加したモデリングサイクル（Greefrath, 2011）にもとづいて，ワークショップの実際を報告した（Tanazawa & Matsuzaki, 2022）。また，埼玉県内国立大学附属高等学校第 3 学年の生徒を対象として授業を実施し，授業において生徒がおこなった，ピタゴラス音律の算定法にもとづくモノコードの調律の実践を報告した（棚澤, 2022）。

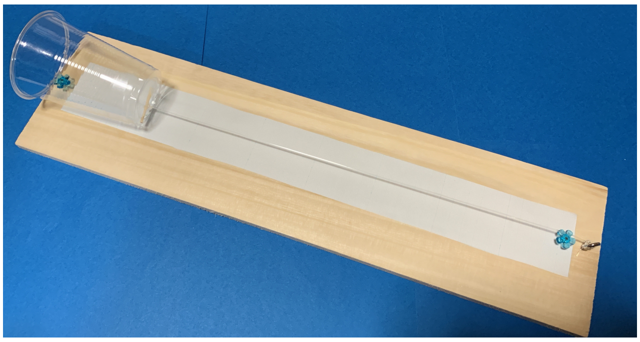


図 1　教具モノコード

複利計算を題材とした授業について，筆者は，米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題 SAT math test Question 4 of 28 をもとに，対数目盛を用いた線形変換に関する教材開発をおこなった（Tanazawa, 2022）。

本稿では，関数電卓使用を前提とするピタゴラス音律を題材としたモデリング授業の実践報告と複利計算を題材としたモデリング授業の実践に向けておこなった研究成果を報告する。

2．ピタゴラス音律を題材とした関数電卓使用を前提とするモデリング授業の実践報告

ここでは，ピタゴラス音律を題材とした関数電卓使用を前提とするモデリング授業に向けておこなった教材研究ならびに教材開発，開発した教材を用いたワークショップや授業の実践について報告する。

2.1.　ピタゴラス音律

ピタゴラスは，弦が 1 本である一弦琴（モノコード）を 2 つ並べて，実験をおこなったところ，次の 2 つのことを発見した：弦の長さを半分にしたときの音は，1 オクターヴ上の音になる。1 つを開放弦，もう 1 つの弦の長さを 1 : 2 に分割して同時に弾いたとき，2 音が協和する（小方, 2018）。このことから，ピタゴラスは，異なる音同士で最も協和する音程比である 3:2 の関係を用いて音律を作り，この音律がピタゴラス音律である（桜井・坂口, 2011）。

2.2.　ピタゴラス音律の算定法に着目した教材研究

筆者は，2 つのピタゴラス音律の算定法に着目し，その算定法を数学的に考察した（棚澤, 2021）。具体的には，ピタゴラスの算定法と三分損益法である。ここで，2 つのピタゴラス音律の算定法について述べる。

2.2.1.　ピタゴラスの算定法

ピタゴラスの算定法では，以下の手順で弦の長さを求めていく（棚澤, 2021）。ここでは，基準の音である主音の弦の長さを 1 としている（図 2）。

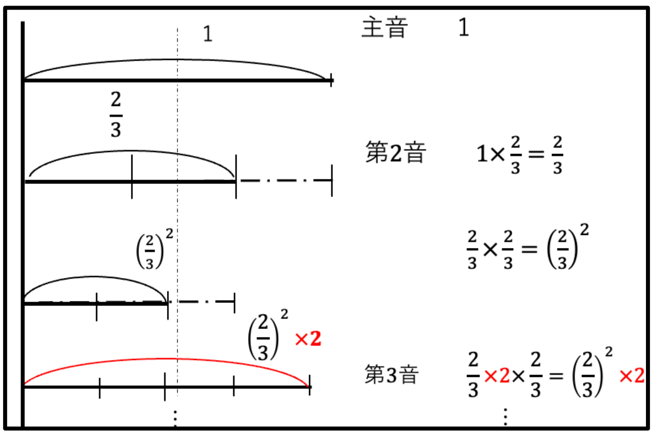


図 2　ピタゴラスの算定法を表した図

【手順①】主音の弦の長さから第2音の弦の長さを求める

主音の弦の長さと，主音から 1 オクターヴ上の音の弦の長さの比は2:1 であることから，主音でない音を1オクターブ内につくるためには，弦の長さが$\frac{1}{2}$以上必要となる。主音の弦の長さを$\frac{2}{3}$倍して，第2音の弦の長さを求めると，その長さは，$1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$となる。

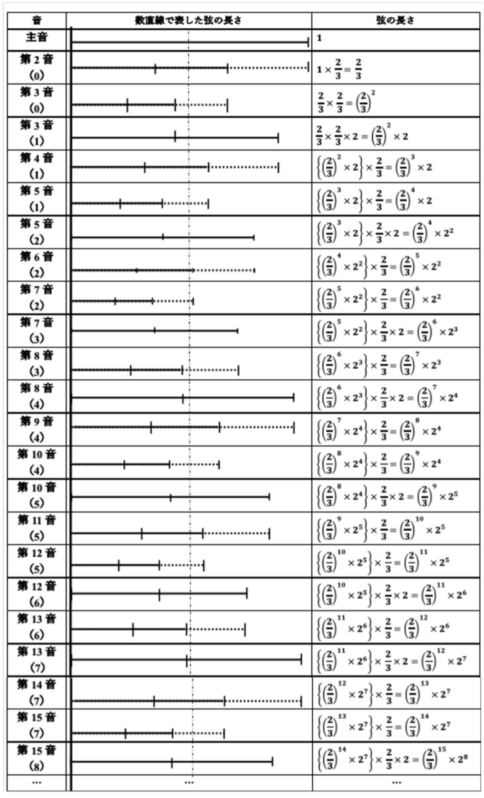
【手順②】第2音の弦の長さから第3音の弦の長さを求める

手順①と同様に，第2音の弦の長さを$\frac{2}{3}$倍すると，$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$となる。しかし，ここで求めた第3音の弦の長さは，$\frac{1}{2}$より小さくなってしまい，1オクターブ内につくることができていない。そのため，弦の長をさらに2倍し，1オクターブ内に第3音をつくると，第3の長さは，$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2$となる。

【手順③】第3音の弦の長さから第4音の弦の長さを求める

手順①と同様に，第3音の弦の長さを$\frac{2}{3}$倍すると，第4音の弦の長さを求めることができるので，第 4 音の弦の長さは，$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times2$となる。

筆者は，以上のような手順で計算おこない，求めた弦の長さを以下のようにまとめた（図3）。



音	数直線で表した弦の長さ	弦の長さ
主音		1
第2音 (0)		$1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$
第3音 (0)		$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$
第3音 (1)		$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2$
第4音 (1)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times2$
第5音 (1)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\times2\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4\times2$
第5音 (2)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\times2\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^4\times2^2$
第6音 (2)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4\times2^2\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5\times2^2$
第7音 (2)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\times2^2\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^6\times2^2$
第7音 (3)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\times2^2\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^6\times2^3$
第8音 (3)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^6\times2^3\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^7\times2^3$
第8音 (4)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^6\times2^3\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^7\times2^4$
第9音 (4)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^7\times2^4\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^8\times2^4$
第10音 (4)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^8\times2^4\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^9\times2^4$
第10音 (5)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^8\times2^4\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^9\times2^5$
第11音 (5)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^9\times2^5\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\times2^5$
第12音 (5)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\times2^5\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times2^5$
第12音 (6)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\times2^5\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times2^6$
第13音 (6)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times2^6\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times2^6$
第13音 (7)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times2^6\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times2^7$
第14音 (7)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times2^7\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\times2^7$
第15音 (7)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\times2^7\right\}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{14}\times2^7$
第15音 (8)		$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{14}\times2^7\right\}\times\frac{2}{3}\times2=\left(\frac{2}{3}\right)^{15}\times2^8$
…	…	…

図3　弦の長さを求めた結果（棚澤, 2021, p.26）

ここで，図3の「音」の列に記されている，第x音（y）のyは，弦の長さを2倍して，1オクターヴ内に移動させた回数である。また，これらをもとに，第x音の弦の長さは以下のように表すことができる。なお，xは自然数，yは0以上の整数である。

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\times2^y$$

例えば，第 5 音のとき，主音の弦の長さから順に第 5 音の弦の長さまで求める際に，1オクターヴ内に移動させた回数は2回なので，$\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}\times2^2$となる。

2.2.2. 三分損益法

ここでは，中国で古代から使われている，竹で作られた律管を用いた「三分損益法」について述べる。ここで，律管とは，均一の太さの竹管で作ったピッチパイプである（田中, 2014）。

ある律管の長さを$\frac{2}{3}$倍することは，長さを三分し，そのうちの一を取り除くことであるため，「三分損一」と呼ぶ。また，ある律管の長さを$\frac{4}{3}$倍することは，長さを三分し，そのうちの一を益すこととであるため，「三分益一」と呼ぶ。「三分損益法」とは，「三分損一」と「三分益一」の計算を繰り返して音階を作る方法である（田中, 2014）。

「三分損益法」では，以下の手順で律管の長さを求めていく（棚澤, 2021）。なお，ここでは，主音の律管の長さを9とする。

【手順Ⅰ】主音から第2音を求める

「三分損一」をおこなっているため，主音の律管の長さを$\frac{2}{3}$倍して，第2音の弦の長さを求めると，その長さは，$9\times\frac{2}{3}=6$となる。

【手順Ⅱ】第2音から第3音を求める

手順（Ⅰ）の後に，「三分益一」をおこなっているため，第2音の律管の長さを$\frac{4}{3}$倍して，第3音の弦の長さを求めると，その長さは，$9\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=8$となる。

【手順Ⅲ】第3音から第4音を求める

手順（Ⅱ）の後に，「三分損一」ををおこなっているため，ため，第3音の律管の長さを$\frac{2}{3}$倍して，第4音の弦の長さを求めると，その長さは，$9\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$となる。

筆者は，以上のような手順で計算をおこない，律管の長さが，主音の1オクターヴ上の音の律管の長さ，すなわち主音の律管の長さである 9 の半分の長さである 4.5 になるまで計算を続けた。また，計算した結果を以下のようにまとめた（図4）。

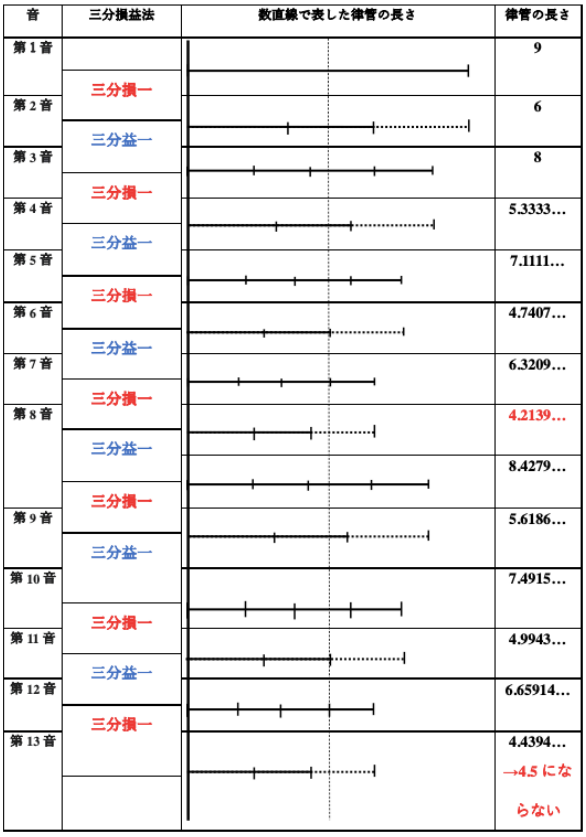


図4　「三分損益法」による計算結果（棚澤, 2021, p.28）

ここで，「三分損一」を3回，「三分益一」を3回おこなったのち，「三分損一」をおこない，第7音の律管の長さから第8音の律管の長さを求めたところ，第8音の律管の長さが4.5よりも小さくなった。そのため，「三分損一」を3回，「三分益一」を3回おこなったのち，「三分益一」をおこない，第7音の律管の長さから第8音の律管の長さを求めた。また，「三分損一」を6回，「三分益一」を6回おこない，第12音の律管の長さから第13音の律管の長さを求めたところ，本来であれば4.5となるはずだが，律管の長さが4.4となり，主音の1オクターヴ上の音よりも小さくなってしまう。つまり，求めた第13音は，主音を1オクターヴ上にしたものよりも，高い音になってしまう。この音の誤差は「ピタゴラス・コンマ」である（田中, 2015）。

「三分損益法」より，律管の長さを x と y を用いて表すと以下のようになる。ここでは，主音の律管の長さを9とし，x は「三分損一」をおこなった回数の合計値，y は「三分益一」をおこなった回数の合計値を示している。

$$9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{4}{3}\right)^y$$

2.3. ピタゴラス音律の算定法にもとづく関数電卓使用を前提とする教材開発

筆者は，ピタゴラス音律の算定法をもとに，関数電卓使用を前提とする教材開発をおこなった（Tanazawa, 2021）。ここでは，筆者が開発した教具モノコードについての説明と，教具モノコードと関数電卓を用いた教材研究について述べる。

2.3.1. 教具モノコード

教具モノコードは，関数電卓を用いて求めたモノコードの弦の長さが，どの音にあたるのかを実際に確認することができる教具である。

弦の長さを調節する琴柱（ことじ）を，左右に動かすことで，弦を弾いたときの音が変化する（図5）。また，開放弦ではない弦を弾くときは，琴柱の左側を弾く。

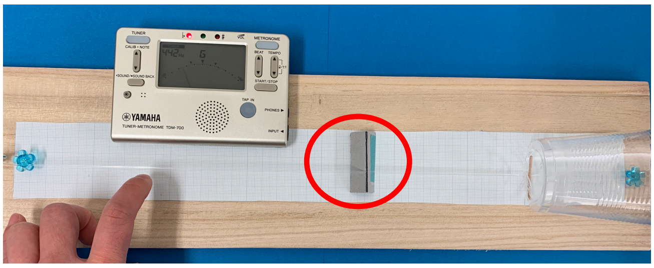


図5　琴柱を用いてモノコードの弦の長さを第2音の弦の長さにした状態

2.3.2. ピタゴラス音律の算定法にもとづく関数電卓を使用した教具モノコードの弦の長さを求める活動

ここでは，ピタゴラス音律の算定法にもとづく関数電卓を使用した教具モノコードの弦の長さを求める活動について述べる。なお，使用する関数電卓のモード・機能は，「基本計算」モードのアンサーメモリーである。ピタゴラスの算定法では，基準となる音である主音から順に，弦の長さを2倍して3で割り，求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には，さらに2倍するという計算を繰り返しおこない，1オクターヴ内に主音以外の音を求める。ピタゴラスの算定法によるモノコードの弦の長さを求める活動では，主音を「ド」とし，以下の【手順①‘】から【手順③‘】を1オクターヴ上の「ド」が出てくるまで，繰り返しおこなう；

【手順①‘】ピタゴラス音律の算定法を確認する。このとき，主音の弦の長さを1とする。

【手順②‘】関数電卓の基本計算モードのアンサーメモリーを利用して，第2音の弦の長さを求める。このとき，主音の弦の長さは，モノコードの開放弦の長さである34.0 cmとなる（図6）。

【手順③‘】求めた第2音の弦の長さをもとに，モノコードで実際に音を鳴らし，チューナーを用いて音を確認する。

図6　弦の長さが34.0 cmの主音の音を確認した状態

以下，1オクターヴ上の「ド」が出てくるまで，繰り返しおこなった，【手順②‘】と【手順③‘】をおこなう。

【主音の弦の長さから求めた第2音の弦の長さ】

「ド」(主音) の弦の長さであるモノコードの弦の長さ 34.0 cm を 2 倍して 3 で割るため，$34.0 \times \frac{2}{3}$を入力すると，22.66666667 と表示される。これは，第2音の弦の長さである（図7）。

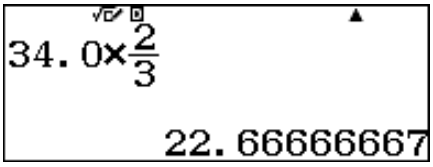


図7　$34.0 \times \frac{2}{3}$を入力したときの関数電卓の画面

求めた第 2 音の弦の長さをもとに，モノコードで実際に音を鳴らし，第2音の音をチューナーを用いて確認すると，チューナーで「G」と表示されたことから，第 2 音の音が「ソ」であることを確認することができる（図8）。

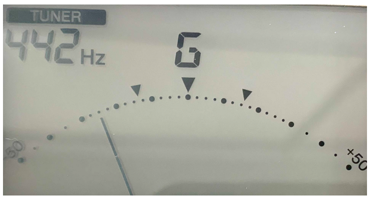


図8　「G」と表示されたチューナーの画面

【第2音の弦の長さから求めた第3音の弦の長さ】

関数電卓の基本計算モードのアンサーメモリーを利用して，第3音の弦の長さを求める。第2音の弦の長さを2倍して3で割るため，Ans$\times \frac{2}{3}$を入力すると，15.11111111 と表示される（図9）。

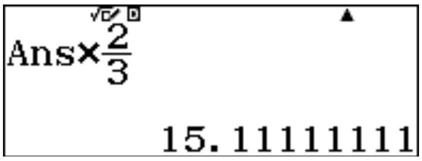


図9　Ans$\times \frac{2}{3}$を入力したときの関数電卓の画面

出力結果が，「ド」の弦の長さの半分（17.0 cm）より小さくなるため，2倍する。これより，Ans × 2を入力すると，30.22222222 と表示される（図10）。これより，小数第1位まで求めた 30.2 cm が第3音の弦の長さである。

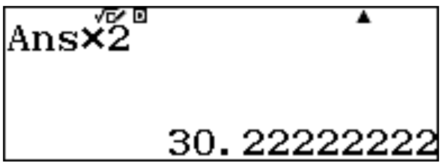


図10　Ans × 2を入力したときの関数電卓の画面

求めた第 3 音の弦の長さをもとに，モノコードで実際に音を鳴らし，第3音の音をチューナーを用いて確認すると，チューナーで「D」と表示されたことから，第 3 音の音が「レ」であることを確認することができる（図11）。

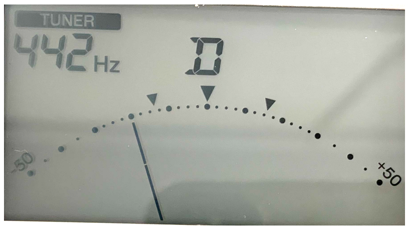


図11　「D」と表示されたチューナーの画面

上記手順で，第3音以降も弦の長さを求めると，第13音が 1 オクターヴ上の「ド」になることが確認できる。表 1 は，主音（第1音）から第13音まで求めた弦の長さに対応する音である（表1）。

表1　求めた弦の長さに対応する音

ピタゴラス音律の算定法をもとに求めた音	関数電卓の基本計算モードのアンサーメモリーを利用して求めた弦の長さ	弦の長さに対応する音
主音（第1音）	34.0 cm	ド
第2音	22.7 cm	ソ
第3音	30.2 cm	レ
第4音	20.1 cm	ラ
第5音	26.9 cm	ミ
第6音	17.9 cm	シ
第7音	23.9 cm	ファ＃（ソ♭）
第8音	31.8 cm	ド＃（レ♭）
第9音	21.2 cm	ソ＃（ラ♭）
第10音	28.3 cm	レ＃（ミ♭）
第11音	18.9 cm	ラ＃（シ♭）
第12音	25.1 cm	ファ
第13音	16.8 cm	ド（1オクターヴ上）

2.4. 大学生を対象としたワークショップの実践報告

筆者らは、開発した教具モノコードを用いて，大学生を対象としたワークショップを実施した（棚澤・松嵜, 2022）。ワークショップの流れは，以下の通りである（表1）。

表 1　ワークショップの展開（棚澤・松嵜, 2022, p.72）

流れ	○ワークショップの展開　●指導上の留意点
導入	○モノコードを作成する。 ・モノコードを作成し終わった学生から順に，チューナーを用いて，開放弦の音が「ド」の音になるように調弦する。
展開	○耳で音律を確認する。 ・作成したモノコードを用いて，実際に弦を弾いて音を鳴らし，「ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ド（1 オクターヴ）」の部分に印（「×」）と音階を書く。 ○「音律」，ピタゴラスの音楽研究，ピタゴラス音律について知る。 ○ピタゴラス音律の算定法について知る。 ○ピタゴラスの算定法における弦の長さの求め方を確認し，関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求め，チューナーを用いて調律する。 ・ピタゴラスの算定法をもとに，モノコードの弦の長さを求める。弦の長さを求める際には，主音を「ド」とし，以下の①から③を 1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまで，繰り返しおこなう； ①ピタゴラス音律の算定法を確認する。このとき，主音の弦の長さを 1 とする。 ②関数電卓の「基本計算」モードのアンサーメモリーを利用して，第 2 音の弦の長さを求める。このとき，主音の弦の長さは，モノコードの開放弦の長さとなる。 ③求めた第 2 音の弦の長さをもとに，モノコードで実際に音を鳴らし，チューナーを用いて音を確認する。 ・上記手順で，第 3 音以降も弦の長さを求めると，第 13 音が 1 オクターヴ上の「ド」になることが確認できる。 ●関数電卓を用いて，1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまでの調律が終わった学生には，チューナーを用いて，調律をおこなった音の音階を確認するよう指示する。
まとめ	○課題を確認する。

ワークショップにおける課題は，以下の通りである。

> 第x音の弦の長さを求める際，主音の弦の長さの半分の長さより小さくなった長さを 2 倍する操作の合計回数をyとするとき，弦の長さをx, yを用いて表しなさい。また，実際に求めた弦の長さと同じになっているのか，関数電卓を用いてどのように確認したのか，かきなさい。

なお，学生が使用する関数電卓のモードや機能は指定しない。

ワークショップでは，学生らは，ピタゴラス音律の算定法をもとに，教具モノコードと関数電卓を用いて，実際にモノコードを弾いて耳で確認した音律を，調律する。そして，学生自身が表した弦の長さを求める関数をもとに，関数電卓を用いて弦の長さを求め，調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認する。筆者らは，これらの活動を【確認】と呼ぶ（棚澤・松嵜, 2022）。

2.4.1. ワークショップの実際

筆者らは，2021（令和 3）年 9 月 8 日に東京都内国立大学理工系学部の学生 8 名を対象として，2021（令和 3）年 12 月 19 日に茨城県内国立大学理系学部の学生 19 名を対象として，ワークショップを実施した。そして，学生が【確認】で表した弦の長さを求める関数を，以下の 3 つのタイプに分類した（棚澤・松嵜, 2022）；

> （タイプⅠ）
> 基準となる音である主音から順に, 弦の長さを 2 倍して 3 で割る計算と，求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には，さらに 2 倍するという計算を分けて表している関数。
> （タイプⅡ）
> 基準となる音である主音から順に, 弦の長さを 2 倍して 3 で割る計算と，求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には，さらに 2 倍するという計算を 1 つにまとめて表している関数。
> （タイプⅢ）
> 1 変数で表されている関数。

また，筆者らは，（タイプⅠ）から（タイプⅢ）において，学生が【確認】で使用した，関数電卓のモードと機能，関数電卓の使用方法を分類・整理し，学生が，自身が表した弦の長さを求める関数をもとに，関数電卓を用いて弦の長さを求め，【確認】をおこなうことができているか，分類・整理した（棚澤・松嵜, 2022）。

【確認】をおこなう際，「基本計算」モードのカルク機能を使用している学生は，自身が表した弦の長さを求める関数を用いて，【確認】ができていることがワークシートから読み取れた。一方で，（タイプⅠ）と（タイプⅡ）のどちらにおいても【確認】をおこなう際，「基本計算」モードのアンサーメモリーを使用している学生がいたが，アンサーメモリーを使用していた学生は，自身が表した弦の長さを求める関数を用いて，【確認】ができていなかった。

弦の長さを求める関数を，（タイプⅢ）の関数で表し，関数電卓の「数表作成」モードを使用して【確認】をおこなった学生 KH は，弦の長さを求める関数を以下のように表した。なお，$f(x)$を第 x 音の弦の長さとする。また，$z = \log_2 3 - 1$，主音の弦の長さを 34 cm とする。

$$f(x) = 17 \times \frac{2^{x+\mathrm{Int}\{(x-1)z\}}}{3^{x-1}} \quad \cdots \quad (1)$$

学生 KH は，一度，第 x 音の弦の長さを$\frac{2^{x+1}}{3^{x-1}} \times 17$と表した後，$x$ と y の関係に着目している。第 x 音の弦の長さを求める際には，「（x—1）回 $\frac{2}{3}$ 倍し，適した回数だけ 2 倍すればよいことが分かる。」と記述しており，これは，「$\frac{1}{2} \times \mathrm{A} < \mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \times 2^y \leqq \mathrm{A}$を満たす自然数 y を求めることと同値である」と述べている。ここで，A は，主音の弦の長さで

ある。このことから，底を2として，両辺対数をとると，

$$\log_2 \frac{1}{2}\mathrm{A} < \log_2 \mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \times 2^y \leqq \log_2 \mathrm{A}$$

$$-1 < (x-1)(1-\log_2 3) + y \leqq 0$$

$$(\log_2 3 - 1)(x-1) - 1 < y \leqq (\log_2 3 - 1)(x-1)$$

となることから，ガウス記号を用いると，

$$y = \lfloor (\log_2 3 - 1)(x-1) \rfloor$$

となり，yを，xを用いて表すことができる。学生KHは，関数電卓を用いて確認する際，ガウス記号の代わりに，引数として指定された数値の整数部分を取り出す関数である，関数電卓のIntを使用し，弦の長さを求める関数を，関数(1)のように表した。

学生KHは，「数表作成」モードを選択した後，関数（1）をもとに，関数（2）を入力した。

$$f(x) = 17 \times \frac{2^{x+\mathrm{Int}\{(x-1)(\log_2 3-1)\}}}{3^{x-1}} \cdots \quad (2)$$

そして，数表の範囲を図8のように設定した（図12）。2.3.2. より，1オクターヴ上の「ド」が第13音であることから，終了値を13としている。

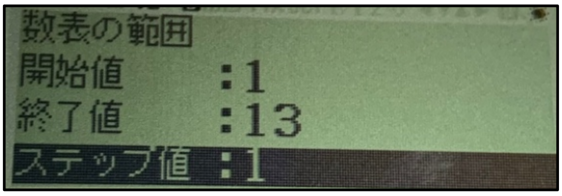


図12　数表の範囲を設定したときの
関数電卓画面

表示された出力結果を見ると，$f(x)$の列に表示されている値が，第x音の弦の長さとなっている（図13）。学生KHは，この出力結果と調律する中で求めた弦の長さが同じになっていることを確認した。

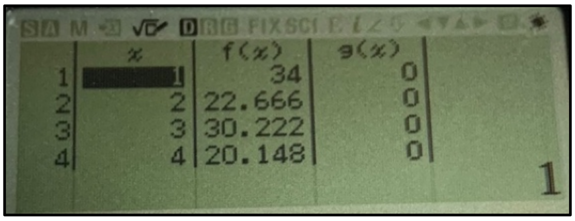


図13　出力結果が表示されたときの
関数電卓画面

2.4.2. コンピュータモデルを付加したモデリング・サイクルにもとづくワークショップの実践報告

また，筆者らは，分類・整理した結果をもとに，コンピュータモデルを付加したモデリング・サイクル（Greeftath, 2011）にもとづいて，ワークショップの実際を報告した（Tanazawa & Matsuzaki, 2022）。

コンピュータモデルを付加したモデリング・サイクル（図14）にもとづいて説明すると，ピタゴラス音律の算定法は，数学的モデル（mathematical model）であり，関数電卓の機能やモードはコンピュータモデル（computer model）である。学生らが，実際にモノコードを弾いて耳で確認し，調律した7つの音は現実的モデル（situation models）であり，自分の耳を頼りにした調律は，現実（Reality）だけでおこなわれていた。関数電卓を使った調律において，ピタゴラス音律の算定法をもとに「アンサーメモリー」を使って求めた弦の長さは数学的結果（mathematical results）であり，これはコンピュータ結果（computer results）をもとに配置されている。関数電卓を使って調律した音は，数学的結果（mathematical results）をもとに配置されていることから，根拠に基づいた現実的結果（real results）である。これより，学生らは，場面モデル（situation models）を修正することができた。また，学生が表した弦の長さを求める関数もピタゴラス音律の算定法をもとにしているため，数学的結果（mathematical results）であり，関数である数学的結果（mathematical results）とコンピュータモデル（computer model）が異なっていても，弦の長さである数学的モデル（mathematical results）は同じになることがわかった。

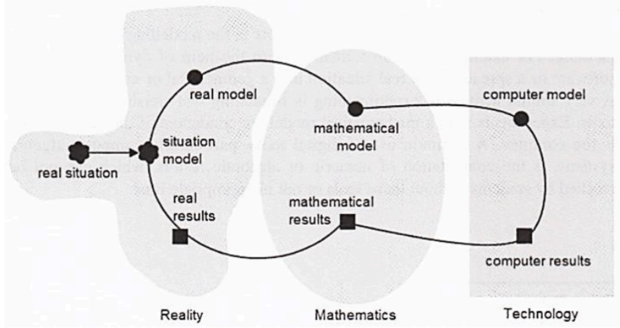


図14　コンピュータモデルを付加した
モデリング・サイクル（Greefrath, 2011, p.302）

2.5. 高校生を対象とした授業の実践報告

筆者は，ワークショップでの実践をもとに，関数電卓使用を前提とする音律を題材とした指数関数の授業構想し，埼玉県内国立大学附属高等学校第3学年の生徒を対象として授業を実践した。そして，授業において生徒らがおこなった，ピタゴラス音律の算定法にもとづくモノコードの調律の実践を報告した（棚澤, 2022）

2.5.1. 関数電卓使用を前提とする音律を題材とした指数関数の授業計画

授業時間は，4時間で計画し，本授業の実践前に，関数電卓の基本操作の説明を2時間おこなった。授業の目的は，次の2点についてあきらかにすることである：生徒らがピタゴラス音律の算定法をもとに，弦の長さを求める関数をどのように表したのか，【確認】をおこなう際，どのような関数電卓のモードや機能を用いて確認したのか。また，第3学年の生徒を対象とした，関数電卓使用を前提とする音律を題材とした指数関数の授業は，以下の流れで実施した（表2）。なお，課題は，2.4. で示した大学生対象のワークショップにおける課題と同様のものであり，生徒が使用する関数電卓のモードや機能は指定しなかった。

表2　授業の展開

	流れ	○授業の展開
第1・2時	導入	○モノコードを作成する。 ・チューナーを用いて，開放弦の音が「ド」の音になるように調弦する。
	展開	○耳で音律を確認する。 ・作成したモノコードを用いて，実際に弦を弾いて音を鳴らし，「ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ド（1 オクターヴ）」の部分に印（「×」）と音階を書く。 ○「音律」，ピタゴラスの音楽研究，ピタゴラス音律について知る。 ○ピタゴラス音律の算定法について知る。
第3・4時	導入	○ピタゴラス音律の算定法について振り返る。
	展開	○ピタゴラスの算定法における弦の長さの求め方を確認し，関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求め，求めた弦の長さがどの音になるのかをチューナーを用いて確認する。 ・ピタゴラスの算定法をもとに，モノコードの求めたい音の弦の長さを求める。弦の長さを求める際には，主音を「ド」とし，以下の①から③を1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまで，繰り返しおこなう； ①ピタゴラス音律の算定法を確認する。このとき，主音の弦の長さを1 とする。 ②関数電卓の「基本計算」モードのアンサーメモリーを利用して，第2 音の弦の長さを求める。このとき，主音の弦の長さは，モノコードの開放弦の長さとなる。 ③求めた第2 音の弦の長さをもとに，モノコードで実際に音を鳴らし，チューナーを用いて音を確認する。 ・上記手順で，第3 音以降も弦の長さを求めると，第13 音が1 オクターヴ上の「ド」になることが確認できる。
	まとめ	○課題を確認する。

2.5.2.　関数電卓使用を前提とする音律を題材とした指数関数の授業の実際

筆者は，第1・2 時の授業を，2022（令和4）年6 月7 日に，第3・4 時の授業を，2022（令和4）年6 月14 日に，埼玉県内国立大学附属高等学校第3 学年の生徒21 名を対象として授業を実践した。以下の図は，生徒が関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求め，チューナーを用いて調律している様子である（図15）。ここでは，2.4.1. と同様に，生徒が，表した弦の長さを求める関数と，【確認】で使用した関数電卓のモードや機能に着目して，生徒の課題解決の実際を報告する。

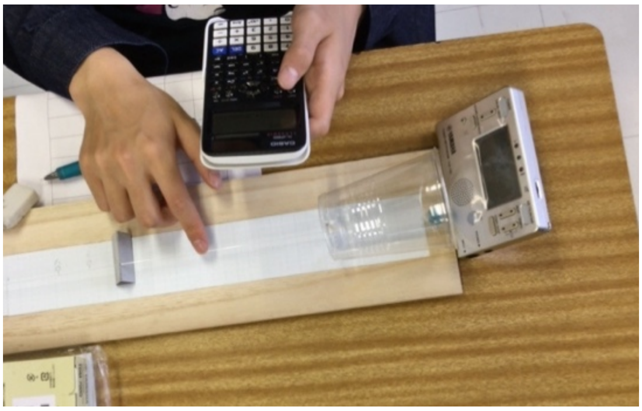


図15　関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求め，チューナーを用いて調律している様子

生徒ら21 名が表した弦の長さを求める関数は，すべて（タイプⅠ）の関数であり，【確認】で使用した関数電卓のモードや機能とその確認方法は，「基本計算」モードのカルク機能を用いた確認方法の他，大学生対象のワークショップでは，出てこなかった，「基本計算」モードのカルク機能と「基本計算」モードのアンサーメモリーを併用して使用した確認方法もあった。また，生徒 $\mathrm{TK_A}$ が【確認】の中で，自身が最初に表した弦の長さを求める関数が間違っていることに気づき，修正をおこなったことをワークシート（図16）から読み取ることができた（棚澤, 2022）。

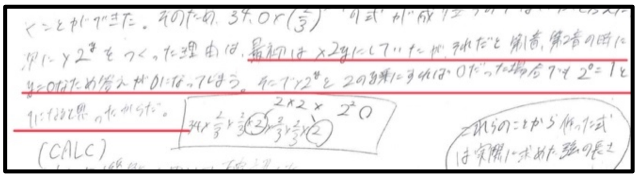


図16　生徒 $\mathrm{TK_A}$ の記述（下線は筆者が加筆）

3．複利計算を題材とした関数電卓使用を前提とするモデリング授業に向けて

複利計算を題材とした授業について，筆者は，米国の標準テストSAT のThe SAT Math Test のサンプル問題SAT math test Question 4 of 28 をもとに，関数電卓の「統計計算」モードを使って，対数目盛を用いた線形変換に関する教材開発をおこなった（Tanazawa, 2022）。以下，サンプル問題SAT math test Question 4 of 28 の内容である。

> アリソンは500 ドルを，年5%の複利で利息がつく新しい普通預金口座に預けました。もし，アリソンが預金を追加したり引き出したりしない場合，口座の残高が2 倍になるには何年かかるでしょうか。

この問題では，口座の残高が2 倍になる（1000 ドルになる）年数を求める．年数を x，口座残高を y とすると，口座残高を求める式は以下のように表される。

$$y = 500 \times (1.05)^x \quad \cdots\cdots ①$$

口座残高を求める関数である式①をグラフで表すと，以下のように曲線になる（図17）。

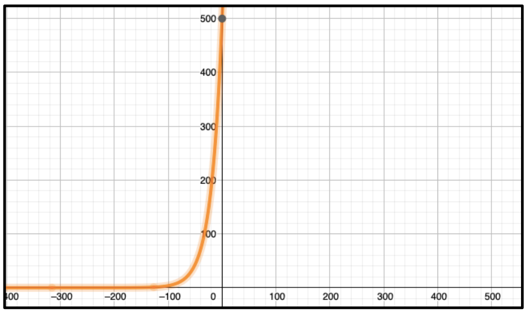


図 17　式①のグラフ

式①のグラフからもわかるように，x の値が 1 増加すると，y の増加量も大きくなる。そのため，年度ごとの変化を確認することが難しい。そこで，式①の両辺の常用対数をとると，x，y，$\log_{10}y$ の値は以下のようになり（表 3），x の値が 1 増加したとき，$\log_{10}y$ の増加量は，y の増加量よりも小さくなるため，年度ごとの変化が確認し易くなる。

表 3　x の値，y の値，$\log_{10}y$の値をまとめた表

x	y	$\log_{10}y$
1	525	2.720159303
2	551.25	2.741348602
3	578.8125	2.762537902
4	607.753125	2.783727201
5	638.1407813	2.8049165
…	…	…

関数電卓の「統計計算」モードを用いて，2 変数（x , y）2 次回帰計算をおこなうと，以下のような回帰計算結果が表示される。

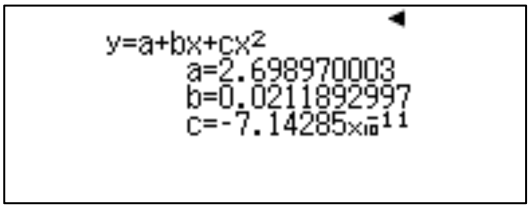


図 18　回帰計算結果が一覧表示されたときの関数電卓画面

x^2 の係数（c の値）に着目すると，-7.14285×10^{-11} であり，限りなく 0 に近い値となっている。このことから，x の値，y の値の常用対数をとった値をもとに，関数電卓の「統計計算」モードを用いて，2 変数（x , y）2 次回帰計算をおこなった場合，グラフの概形は直線とみなすことができ，これは，直線とみなすための根拠の 1 つである。

4．おわりに

今後，高等学校数学科における教材として，統計的手法による対数目盛を用いた線形変換に 関する教材開発に取り組んでいく（棚澤・松嵜, 2023）。そして，関数電卓使用を前提とする複利計算を題材としたモデリング授業を実践し，その結果をもとに，授業の検討と改善をおこなう。

註. 本研究は，埼玉大学がカシオ計算機株式会社と締結した受託研究「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」（研究代表者：松嵜昭雄）の助成を受けている。

引用・参考文献

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman. (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14 (pp.301-304). Springer.

小方厚（2018）『音律と音階の科学　新装版　ドレミ…はどのように生まれたか』（pp.36-39）．講談社

桜井進・坂口博樹（2011）『音楽と数学の交差』（pp.40-56）．大月書店

田中有紀（2014）『中国の音楽論と平均律　儒教における楽の思想』（pp.13-15）．風響社

棚澤日菜子（2021）「関数電卓使用を前提とする音律を題材とした数学教材開発に向けてーピタゴラスの算定法と三分損益法に着目してー」『2021 年度数学教育学会夏季研究会（関東エリア）発表論文集』pp.25-28.

Tanazawa, H. (2021, December). Development of teaching materials on the subject of musical temperament on the premise of using scientific calculator: Using answer memory of basic calculation mode for the calculation method of Pythagorean tuning. Oral Presentation at 9th International Conference of Research on Mathematics and Science Education in 2021. Online.

棚澤日菜子（2022）「関数電卓使用を前提とする指数関数の授業実践ーピタゴラス音律の算定法にもとづくモノコードの調律を通してー」『2022 年度数学教育学会夏季研究会（関東エリア）発表論文集』 pp.5-8.

Tanazawa, H. (2022 December). Development of teaching materials for. linear transformation using logarithmic scale.Oral Presentation at 10th International Conference of Research on Mathematics and Science Education in 2022. Online.

棚澤日菜子・松嵜昭雄（2022）「関数電卓使用を前提とする指数関数の授業構想に向けてーピタゴラス音律を題材とした大学生対象のワークショップの実践報告ー」『2022 年度第 26 回数学教育学会大学院生等発表会予稿集』pp.71-76.

Tanazawa, H., & Matsuzaki, A. (2022, September). Is it possible to tune using scientific calculator? Through the modelling workshop based on Pythagorean tuning. Live Presentation at the 20th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Online.

棚澤日菜子・松嵜昭雄（2023）「対数目盛を用いた線形変換に関する授業構想に向けてー関数電卓の「統計計算」モードの使用と大学生対象のワークショップを通してー」『2023 年度第 27 回数学教育学会大学院生等発表会予稿集』印刷中.